ANALYTISCHE APPROXIMATION FÜR DIE ENERGIE-SPIN-VERTEILUNG BEI BINÄREM STOSS NACH DEM STATISTISCHEN MODELL

INAUGURAL-DISSERTATION
zur
Erlangung der Doktorwürde
des
Fachbereichs Physik
der Philipps-Universität Marburg/Lahn

vorgelegt von

TJOE MULJONO
aus Jember (Indonesien)

Marburg/Lahn 1978

Druck: Görich & Weiershäuser, Marburg

ANALYTISCHE APPROXIMATION FÜR DIE ENERGIE-SPIN-VERTEILUNG BEI BINÄREM STOSS NACH DEM STATISTISCHEN MODELL

INAUGURAL-DISSERTATION
zur
Erlangung der Doktorwürde
des
Fachbereichs Physik
der Philipps-Universität Marburg/Lahn

vorgelegt von

TJOE MULJONO

aus Jember (Indonesien)

Marburg/Lahn 1978

Druck: Görich & Weiershäuser, Marburg

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Vom Fachbereich Physik der Philipps-Universität Marburg/Lahn
als

Dissertation angenommen am: 17. 7. 1978

Tag der mündlichen Prüfung am: 24. 10.1978

Berichterstatter: Prof. Dr. G. Grawert
Mitberichterstatter: Prof. Dr. S. Großmann

Herrn Prof. Dr. G. Grawert danke ich für seine Anregungen und wertvollen Ratschläge bei der Ausführung dieser Arbeit sowie die Arbeitsmöglichkeit am Institut für Theoretische Physik in Marburg.
Allen Mitgliedern der Arbeitsgruppe und speziell Herrn Dr. M. Weström möchte ich für ihre Unterstützung und stete Diskussionsbereitschaft danken.
Frau Schulz gilt mein Dank für ihre Hilfe bei der Reinschrift des Manuskripts. Weiterhin danke ich dem Fachbereich Physik der Philipps-Universität Marburg, an dem ich diese Arbeit anfertigen konnte.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41546009_0034

INHALTSVERZEICHNIS

		Seite
I.	Einleitung	1
II.	Grenzwerte des Drehimpulses bei der Schwerionen-Reaktion	4
II.1	Das sharp-cutoff-Modell	4
II.2	Das Kalinkin-Modell	8
II.3	Das Wilczynski-Modell	10
II.4	Das Bass-Modell	12
II.5	Berechnung von J_{max} mit dem sharp-cutoff-Modell	13
III.	Die Drehimpuls-Abhängigkeit des Wirkungsquerschnitts	16
III.1	Die Thomas-Formel	16
III.2	Auswertung der Thomas-Formel	19
III.2.1	Ansätze zur Auswertung	19
III.2.2	Die Koordinatentransformation	24
III.2.3	Berechnung von f(E') für den Fall $E_2 \leq E' \leq E_1$	26
III.2.4	Berechnung von f(E') für den Fall $E_3 \leq E' \leq E_2$	27
III.2.5	Berechnung von f(E') für den Fall $E' \leq E_3$	28
III.2.6	Die Näherungsauswertung der Thomas-Formel	30
III.3	Die Berechnung von $B_{II}(E_b, I_b)$	34
III.3.1	Die mathematische Behandlung	34
III.3.2	Berechnung von f(E") für $E_2'' \leq E'' \leq E_4''$	38
III.3.3	Berechnung von f(E") für $E'' \leq E_2''$	40
III.3.4	Die Näherungsauswertung von $B_{II}(E_b, I_b)$	41
IV.	Fehlerdiskussion	45
IV.1	Vorbemerkung	45
IV.2	Fehler Δ_1	45
IV.3	Diskussion der Fehlerschranke $\tilde{\Delta}_1$	51
IV.4	Fehler Δ_3	54
IV.5	Diskussion der Fehlerschranke $\tilde{\Delta}_3$	58

Seite

IV.6 Fehler Δ_2 60

IV.7 Diskussion der Fehlerschranke $\tilde{\Delta}_2$ 60

IV.8 Schlußbemerkung 61

V. Die Anwendung 63

V.1 Die relative Population 63

V.2 Diskussion 66

Anhang I 68

Anhang II 69

Anhang III 70

Anhang IV 71

Anhang V 72

Anhang VI 74

Abbildungen 75

Literaturverzeichnis 111

I. EINLEITUNG

Die vorliegende Arbeit bringt eine theoretische Untersuchung der Wahrscheinlichkeits-Verteilung für die Anregungsenergien E_b und Spins I_b eines Atomkerns b, der als Reaktionsprodukt nach einer Schwerionen-Reaktion

$$a + A \longrightarrow b + B \tag{1.1}$$

bei Energien oberhalb der Coulomb-Barriere entsteht. Es soll unter bestimmten Modellannahmen über den Reaktionsablauf näherungsweise die relative Population (RP)

$$RP := \frac{\frac{d\sigma}{dE_b}(E_b, I_b)}{\frac{d\sigma}{dE_b}(E_b = E, I_b = I)} \tag{1.2}$$

berechnet werden, wobei E und I willkürliche Bezugsparameter für Energie und Spin sind. $d\sigma/dE_b$ ist hier der differentielle Wirkungsquerschnitt für die Bildung eines Fragments b mit Anregungsenergie E_b und Spin I_b nach Aufsummation über alle Bahndrehimpulse sowie alle Energien und Spins des Reaktionspartners B.

Wir gehen davon aus, daß bei Schwerionen-Reaktionen oberhalb der Coulomb-Barriere der Hauptbeitrag zu Wirkungsquerschnitten von Reaktionsabläufen geliefert wird, die durch die Modelle der vollständigen Fusion-Reaktion (complete fusion reaction) und der tiefinelastischen Reaktion beschrieben werden können [1]. Das ist äquivalent zu der Annahme: a + A bilden zunächst einen "intermediären Komplex (composite system)" C, das in einem zweiten Reaktionsschritt in b + B zerfällt.

$$a + A \longrightarrow C \longrightarrow b + B \tag{1.3}$$

Zur approximativen Berechnung der relativen Population (1.2) verwenden wir das statistische Modell, d.h. wir wollen annehmen, daß der Zerfall des intermediären Komplexes praktisch wie der Zerfall eines Compoundkerns

behandelt werden kann, bei dem Bildung und Zerfall als voneinander unabhängig betrachtet werden können. Bei Kernreaktionen mit schweren Ionen bei kinetischen Energien von einigen MeV treten im Eingangskanal hohe Drehimpulse auf. Der intermediäre Komplex wird also mit hohen Drehimpulsen bis höchstens zu einem kritischen Wert J_{cr} entstehen. Im nachfolgenden Zerfall wird dieser Drehimpuls (nach dem Drehimpulserhaltungssatz) auf die beiden Tochterkerne und den Bahndrehimpuls der Relativbewegung aufgeteilt; Tochterkerne werden demnach mit einem breiten Spektrum von Drehimpulsen entstehen. Ausgangspunkt der Rechnungen ist dann eine Erweiterung der wohlbekannten Thomas-Formel [15], siehe (3.3a).

Der Ablauf der Reaktionen (1.3) ist vom kritischen bzw. maximalen Drehimpuls abhängig. Wir werden deshalb im Abschnitt II zunächst den kritischen Drehimpuls J_{cr} der vollständigen Fusion -Reaktion und den maximalen Drehimpuls J_{max} der totalen Reaktion nach verschiedenen Modellen diskutieren. Ziel dieses Abschnitts im Zusammenhang der Arbeit ist die Angabe verläßlicher Werte für den maximalen und den kritischen Drehimpuls für vollständige Fusion.

Im Abschnitt III wird das Hauptziel dann die approximative Auswertung der Thomas-Formel sein. Dieser Abschnitt ist der Hauptteil der vorliegenden Untersuchung. Die Berechnung des Wirkungsquerschnitts nach der Thomas-Formel (3.23) bzw. (3.3a) ist im allgemeinen nur mit numerischen Methoden möglich. In dieser Arbeit werden Näherungen eingeführt, die schließlich zu einer Approximation der Thomas-Formel durch einen einfachen analytischen Ausdruck führen, siehe (3.58). Die Fehler, die sich aus dieser Näherung ergeben, werden in Abschnitt IV ausführlich diskutiert. Es ergibt sich, daß der Fehler in engem Zusammenhang mit der maximalen Anregungsenergie E_{Bo} des Restkerns B und dem Spin I_b des emittierten Kerns b steht. Dabei wird sich herausstellen, daß der Fehler stärker von I_b als von E_{Bo} abhängt.

Im letzten Abschnitt verwenden wir dann diese Approximation der Thomas-Formel zur numerischen Berechnung der relativen Population (1.2). Die Abhängigkeit der relativen Population vom Spin I_b bzw. Anregungsenergie E_b des Fragments b wird diskutiert.

II. Grenzwerte des Drehimpulses bei Schwerionen-Reaktion

II. 1. Das sharp-cutoff-Modell

Die allgemeine Formel für den Reaktionsquerschnitt lautet:

$$\sigma_R = \pi \lambda\!\!\!^{-2} \sum_{J=o}^{\infty} (2J+1)\, T_J^R, \quad \lambda\!\!\!^{-2} = \frac{1}{k^2} = \frac{\hbar^2}{2\mu E_{cm}} \quad . \tag{2.1}$$

Das sharp-cutoff-Modell geht von folgender Modellvorstellung aus:

Eine Kernreaktion findet genau dann statt, wenn der kleinste Abstand der Kerne im Eingangskanal auf ihren klassischen Coulomb-Trajektorien kleiner ist als

$$R = r_o \,(A_1^{1/3} + A_2^{1/3}) + t, \tag{2.2}$$

t ist ein Parameter, der unter anderem die Diffusivität der Kernmaterie an der Kernoberfläche sowie die Reichwerte der Kernkräfte berücksichtigt. E_{cm} ist die Energie im c.m.System. A_1, A_2 sind die Massenzahlen des Projektils bzw. des Targetkerns. μ ist die reduzierte Masse des Systems. Aufgrund dieses Modells setzt man für die Transmissionskoeffizienten

$$T_J^R = \begin{cases} 1 \text{ für } J \leq J_{max} \\ o \qquad \text{sonst,} \end{cases} \tag{2.3}$$

mit

$$J_{max} = \frac{R}{\hbar} \sqrt{2\mu\,(E_{cm} - V_c)}. \tag{2.4}$$

V_c ist Coulombschwelle, d.h. das Coulomb-Potential im Abstand R.

Damit folgt aus (2.1):

$$\sigma_R = \pi \lambda\!\!\!^{-2} \sum_{J=o}^{J_{max}} (2J+1) = \pi \lambda\!\!\!^{-2} \,(J_{max} + 1)^2. \tag{2.5}$$

Gl. (2.4) eingesetzt in (2.5), ergibt mit $J_{max} >> 1$

$$\sigma_R = \pi R^2 \left(1 - \frac{V_c}{E_{cm}}\right) . \tag{2.6}$$

Wir wollen R ganz kurz erörtern, um Werte für r_o und t zu bestimmen.

In Fig. (2.1) ist R in Abhängigkeit von $(A_1^{1/3} + A_2^{1/3})$ nach experimentellen Daten gezeigt, R wurde nach Gl. (2.6) berechnet mit gemessenen Reaktionsquerschnitten σ_R. Die Punkte (·), die Kreuze (+) und Dreiecke (Δ) stellen die Messungsergebnisse von Wilkins et al [2], Lefort [3] und Bertin et al [4] dar. Die durchgezogene Kurve entspricht einer Rechnung mit der Formel [5]

$$R = 1{,}36\ (A_1^{1/3} + A_2^{1/3}) + 0{,}5\ \text{fm}, \tag{2.7}$$

für die sich gute Übereinstimmung ergibt.

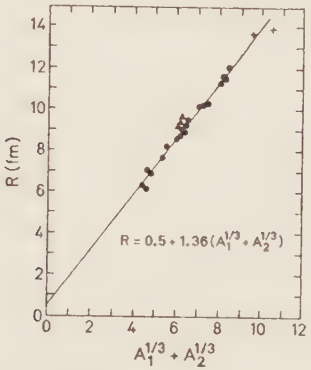


Fig. (2.1): Die Punkte, Kreuze und Dreiecke sind R-Werte, die mit gemessenen Reaktionsquerschnitten σ_R nach Gl. (2.6) berechnet wurden. Die Linie ist $R = 1{,}36\ (A_1^{1/3} + A_2^{1/3}) + 0{,}5$ fm. Aus [6].

Für die reduzierte Masse μ rechnen wir genähert

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2} \approx \frac{1}{m_n}\left(\frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2}\right) = \frac{1}{m_n A_{red}}, \tag{2.8}$$

wobei m_n die Masse des Neutrons, $A_{red} = \frac{A_1 A_2}{A_1 + A_2}$ die reduzierte Massenzahl ist.

Wir setzen (2.8) in (2.4) ein, dann erhalten wir

$$J_{max} = \frac{\sqrt{2m_n}}{\hbar}\ R\ \sqrt{A_{red}\,(E_{cm} - V_c)}. \tag{2.9}$$

Die Figuren (2.2) und (2.3) zeigen in Beispielen Werte für J_{max}, berechnet nach Formel (2.9).

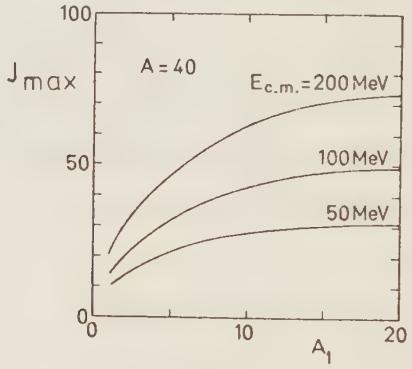


Fig. (2.2): J_{max} nach Gl. (2.9) in Abhängigkeit von A_1, für $A = A_1 + A_2 = 40$, $Z_{1,2} = \frac{A_{1,2}}{2}$ und drei Werte E_{cm}, aus [6].

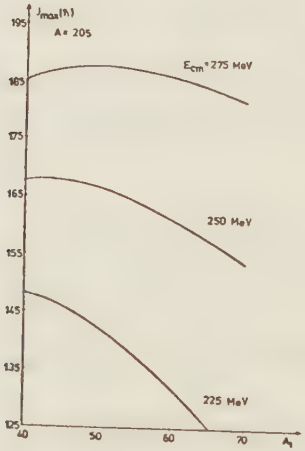


Fig. (2.3): J_{max} nach Gl. (2.9) in Abhängigkeit von A_1, für $A = A_1 + A_2 = 205$, $Z_{1,2} = 0{,}425\ A_{1,2}$ und drei Werte von E_{cm}.

Analog zu (2.5) setzt man für den Wirkungsquerschitt für vollständige Fusion (complete fusion) ein

$$\sigma_{cF} = \pi \lambda^2 \sum_{J=o}^{J_{cr}} (2J + 1). \qquad (2.10)$$

Man nimmt also an, daß vollständige Fusion, d.h. Bildung eines Compoundkerns im Sinn von Bohr genau dann eintritt, wenn der Drehimpuls im Eingangskanal kleiner als ein kritischer Wert J_{cr} ist.

Aus (2.10) folgt

$$\sigma_{cF} = \begin{cases} \sigma_R \text{ für } J_{cr} \geq J_{max} \\ \pi \lambda^2 (J_{cr} + 1)^2 \text{ für } J_{cr} < J_{max}. \end{cases} \qquad (2.11)$$

Aus (2.5) und (2.11) erhält man einen Zusammenhang zwischen J_{max} und J_{cr}.

$$J_{cr} = \left(\frac{\sigma_{cF}}{\sigma_R}\right)^{1/2} (J_{max} + 1) - 1, \qquad (2.12a)$$

oder

$$J_{max} = \left(\frac{\sigma_R}{\sigma_{cF}}\right)^{1/2} (J_{cr} + 1) - 1, \qquad (2.12b)$$

mit

$$J_{cr} = \sqrt{\frac{2\mu E_{cm}}{\hbar^2} \frac{\sigma_{cF}}{\pi}} - 1.$$

Im folgenden werden kurz drei dynamische Modelle zur Berechnung von J_{cr} diskutiert.

II. 2. Das Kalinkin-Modell

Das Kalinkin-Modell [7] beruht auf einem Tröpfchenmodell. Es wird angenommen, daß die vollständige Fusion einen Kern mit Gestalt eines Ellipsoids ergibt.

Sei $\bar{R}$ der Radius einer Kugel mit dem Volumen, das gleich der Summe der Volumina von Geschoß und Targetkern ist, d.h.

$$\frac{4}{3}\pi\bar{R}^3 = \frac{4}{3}\pi(R_p^3 + R_t^3),$$

$$\bar{R} = (R_p^3 + R_t^3)^{1/3} = r_o\,(A_p + A_t)^{1/3}. \qquad (2.13)$$

(R_p, R_t sind die Radien des Projektils bzw. des Targetkerns . A_p, A_t sind die Massenzahlen des Projektils bzw. des Targetkerns.)

Andererseits gilt, wenn man das Volumen des Compound-Systems als Ellipsoid gleich der Summe der Volumina setzt:

$$\frac{4\pi}{3}\,ab^2 = \frac{4\pi}{3}\,(R_p^3 + R_t^3)\,. \qquad (2.14)$$

Für die große Halbachse der Ellipse wird im Kalinkin-Modell angesetzt

$$a = \bar{R} + \left[\frac{A_p}{A_t + A_p}\right] R\,(J,E), \qquad (2.15)$$

wobei R(J,E) der kleinste Abstand der Kerne, berechnet aus (2.16) ist. R(J,E) ist eine Wurzel der Gleichung:

$$E_{cm} - V_c(R) - V_N(R) - \frac{\hbar^2 J^2}{2\mu R^2} = 0, \qquad (2.16)$$

$V_c(R)$ ist das Coulomb-Potential und $V_N(R)$ ist ein Woods-Saxon-Potential

$$V_N(R) = -V_o\,\left[1 + \exp\{(R-R_o)/a_o\}\right]^{-1}, \qquad (2.17)$$

mit V_o = 40 MeV, a_o = 0,45 fm, $R_o = r_o(A_p^{1/3}+A_t^{1/3})$, r_o = 1,22 fm.

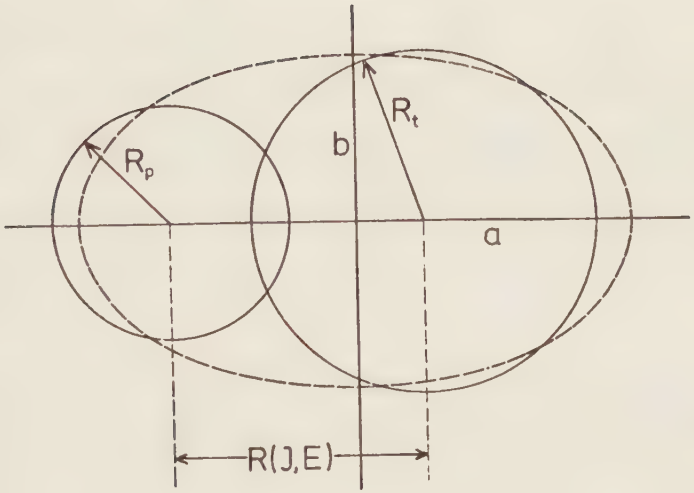


Fig.(2.4): Schema eines compound-Systems der Rotationsellipse.

Die Exzentrizität ist $\varepsilon = (1 - \frac{b^2}{a^2})^{1/2}$, wobei b die kleine Halbachse der Ellipse ist.

Für den kritischen Drehimpuls wird von **Kalinkin** abgeleitet:

$$J_{cr}^2 = \frac{2Ia}{\hbar^2} \quad \frac{2-\varepsilon^2}{1+\varepsilon^2} \quad [\pi Sb\{(1-\varepsilon^2)^{1/2}+\varepsilon^{-1}\arcsin\varepsilon + 3\,\frac{1-\varepsilon^2}{\varepsilon^2}((1-\varepsilon^2)^{1/2}-\varepsilon^{-1}\arcsin\varepsilon)\} +$$

$$0{,}9\,\frac{(Z_{cF}\,e)^2}{a^2\,\varepsilon^2}\,(1 - \frac{3-\varepsilon^2}{6\varepsilon}\,\ln\,\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon})] \quad , \qquad (2.18)$$

wobei I das Trägheitsmoment = $I_{starr} = \frac{1}{5}\,A_{cF}\,M_n\,a^2\,(2-\varepsilon^2)$, $A_{cF} = A_t + A_p$, M_n die Nukleonenmasse, S der Parameter der Oberflächenspannung = 0,95 MeV/F^2 und Z_{cF} e die Ladung des Compoundkerns ist.

Der totale Wirkungsquerschnitt für vollständige Fusion (Fusionsquerschnitt) folgt zu

$$\sigma_{cF} = \frac{\pi\hbar^2\,(J_{cr}+1)^2}{2\mu\,E_{cm}} \quad . \qquad (2.19)$$

Die auf diese Weise ausgewerteten Wirkungsquerschnitte stimmen recht gut mit den Experimenten für niedrige Massen überein, aber weichen bei großen Massen ab.

Fig. (2.5) und Fig. (2.6) stellen die Fusionsquerschnitte der Reaktion ^{16}O auf ^{64}Cu bzw. ^{16}O auf ^{108}Ag dar. Die durchgezo gene Kurve ist der totale Reaktionsquerschnitt σ_R nach Thomas mit dem Parabelpotential [8]. Die gestrich elte Kurve zeigt den berechneten Fusionsquerschnitt σ_{cF} nach dem Kalinkin-Modell. Die Meßpunkte sind die experimentellen Daten [9].

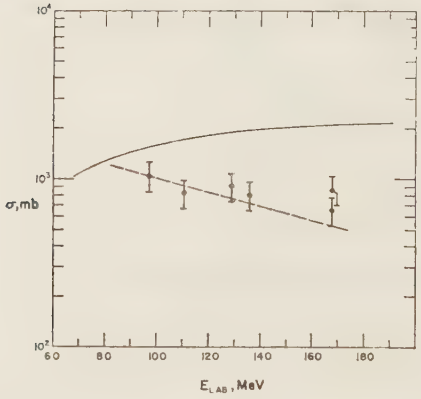


Fig.(2.5): Die Fusionsquerschnitte der Reaktion ^{16}O auf ^{64}Cu, aus [9].

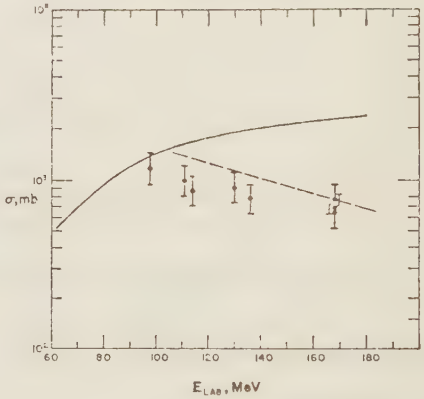


Fig.(2.6): Die Fusionsquerschnitte der Reaktion ^{16}O auf ^{108}Ag, aus [9].

II. 3. Das Wilczynski-Modell

Das Wilczynski-Modell [5,10] beruht auf der Annahme, daß für den kritischen Drehimpuls die Anziehungskraft von zwei sphärischen Tröpfchen gleich der Spaltungskraft (d.h. Coulomtkraft und Zentrifugalkraft) ist.

$$\frac{2\pi\,(\gamma_1+\gamma_2)\,R_1R_2}{R_1+R_2} = \frac{Z_1Z_2\,e^2}{(R_1+R_2)^2} + \frac{J_{cr}(J_{cr}+1)\,\hbar^2}{\mu(R_1+R_2)^3}\,, \qquad (2.20)$$

mit $R_i = r_o\,A_i^{1/3}$, $r_o = 1{,}11$ fm, μ ist die reduzierte Masse und R_1+R_2 ist Halbdichteabstand.

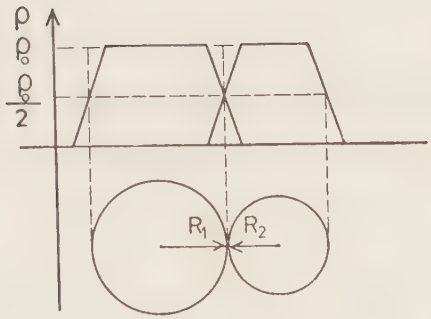


Fig.(2.7): Schema der Dichteverteilung der zwei wechselwirkenden Kerne.

γ_1, γ_2 sind Koeffizienten für die Oberflächenspannung von zwei Tröpfchen.

$$\gamma_i = 0{,}99\ \{1 - 1{,}78\ (\frac{N_i - Z_i}{A_i})^2\}\ \text{MeV} \cdot \text{fm}^{-2}. \qquad (2.21)$$

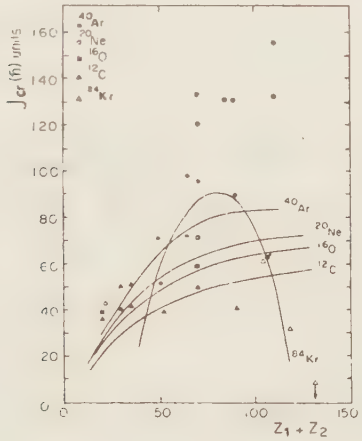


Fig. (2.8): Die berechneten J_{cr}-Werte vom Wilczynski-Modell und die experimentellen Daten, aus [10].

Fig. (2.8) vergleicht die nach diesem Modell berechneten Werte von J_{cr} in den durch ^{12}C, ^{16}O, ^{20}Ne, ^{40}Ar und ^{84}Kr induzierten Reaktionen als Funktion von $Z_1 + Z_2$ mit den experimentellen Daten. Für ^{40}Ar sind die experimentellen Daten größer als die berechneten Werte.

II. 4. Das Bass-Modell

Ein ähnliches Modell ist von Bass [10,11] angegeben worden. Das Bass-Modell berücksichtigt darüber hinaus Reibungseffekte bei der theoretischen Beschreibung der vollständigen Fusion.

Das Potential ist

$$V_J(r) = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r} + \frac{\hbar^2 J^2}{2\mu r^2} - a_s A_1^{1/3} A_2^{1/3} \frac{d}{R_{12}} \exp(-\frac{r-R_{12}}{d}) , \qquad (2.22)$$

wobei $R_{12} = R_1 + R_2 = r_o(A_1^{1/3} + A_2^{1/3})$ der Halbdichteabstand ist, r_o = 1,07 fm, a_s = 17,9 MeV ist der Koeffizient der Oberflächenenergie, d = 1,35 fm ist der Diffusivitätsparameter.

An der Stelle, wo die Fusion stattfindet, treten nun die Reibungseffekte auf. Dabei wird ein Teil des Bahndrehimpulses in innere Drehimpulse der Fragmente umgesetzt. Die Zentrifugalkraft in (2.22) soll mit dem Bruchteil f·J (f<1) berechnet werden.

J_{cr} wird durch die Bedingung $\frac{d V_J(r)}{dr} / r = R_{12} = 0$ bestimmt:

$$-\frac{Z_1 Z_2 e^2}{R_{12}^2} - \frac{f^2 J_{cr}^2 \hbar^2}{\mu R_{12}^3} + \frac{a_s A_1^{1/3} A_2^{1/3}}{R_{12}} = 0. \qquad (2.23)$$

Wir führen folgende Abkürzungen ein:

$$x := \frac{Z_1 Z_2 e^2}{R_{12} a_s A_1^{1/3} A_2^{1/3}}$$

$$y := \frac{\hbar^2}{2\mu R_{12}^2 a_s A_1^{1/3} A_2^{1/3}} , \qquad (2.24)$$

damit folgt aus (2.23)

$$J_{cr}^2 = \frac{1 - x}{2 f^2 y} . \qquad (2.25)$$

Nach der Vorstellung des Sticking-Modells ist der geeignete Wert von f = 5/7 [11].

Die berechneten J_{cr}-Werte nach dem Bass-Modell mit $f = \frac{5}{7}$ und die experimentellen Daten für ^{12}C, ^{16}O, ^{20}Ne, ^{40}Ar induzierte Reaktionen als Funktion von $Z_1 + Z_2$ sind in Fig. (2.9) dargestellt. Für kleine Geschoßmassen zeigt sich, daß die berechneten J_{cr}-Werte größer als die experimentellen Daten sind.

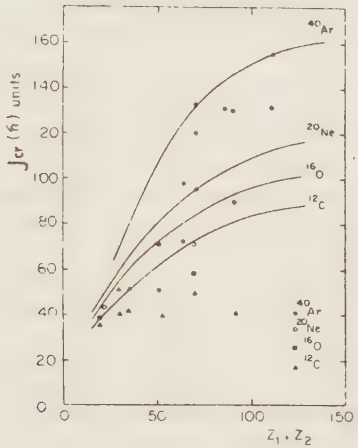


Fig. (2.9): Die berechneten J_{cr}-Werte nach dem Bass-Modell und die experimentellen Daten, aus [10].

Zusammenfassende Bilder (J_{cr}^2 als Funktion von E_{cm}) mit dem Vergleich verschiedener Modelle findet man in Lefort [10] Seite 93. Es zeigt sich, daß J_{cr}^2 nach dem Bass-Modell mit wachsender Energie zunächst zunimmt, danach eine Sättigung erreicht.

II. 5. Berechnung von J_{max} mit dem sharp-cutoff-Modell

Mit Hilfe des sharp-cutoff-Modells wollen wir den maximalen Drehimpuls J_{max} berechnen und in Form der Tabelle I für eine Vielzahl von Beispielen angeben.

Benutzt sind die Gl. (2.4) und (2.7)

$$J_{max}^2 = R^2 \frac{2\mu}{\hbar^2} (E_{cm} - V_c)$$

$$R = 1{,}36 \, (A_1^{1/3} + A_2^{1/3}) + 0{,}5 \text{ fm},$$

mit $$\mu = m_n \frac{A_1 A_2}{A_1 + A_2}, \qquad V_c = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{R}.$$

Mit Hilfe der Gl. (2.12a) kann man J_{cr} berechnen.

Tabelle I: Die Werte von J_{max} und J_{cr} mit Hilfe des sharp-cutoff-Modells

Projektil	Target	CN	E_{lab}(MeV)	E_{cm}(MeV)	$\frac{\sigma_{cF}}{\sigma_R}$	J_{max} (ħ)	J_{cr} (ħ)	Ref
$^{16}_{8}O$	$^{63}_{29}Cu$	$^{79}_{37}Rb$	168	133,97	0,314	73	40	9
			136	108,46	0,411	62	40	9
			129	102,87	0,480	60	41	9
			111	88,52	0,485	53	37	9
			97,6	77,83	0,680	48	39	9
	$^{107}_{47}Ag$	$^{123}_{55}Cs$	168	146,32	0,301	83	45	9
			136	118,45	0,399	70	44	9
			130	113,23	0,476	67	46	9
			114	99,29	0,521	59	42	9
			111	96,68	0,624	57	45	9
			97,6	85,01	0,856	49	45	9
	$^{197}_{79}Au$	$^{213}_{87}Fr$	168	155,38	0,686	89	73	9
			136	125,78	0,673	70	57	9
			129	119,31	0,696	65	54	9
			111	102,66	0,883	51	48	9
			99,5	92,03	0,937	39	38	9
			97,6	90,27	0,981	37	36	9
	$^{209}_{83}Bi$	$^{225}_{91}Pa$	168	156,05	0,691	89	74	9
			117	108,68	0,927	55	51	9
$^{20}_{10}Ne$	$^{63}_{29}Cu$	$^{83}_{39}Y$	210	159,4	0,245	88	43	9
			169	128,28	0,325	76	43	9
	$^{107}_{47}Ag$	$^{127}_{57}La$	210	177,19	0,287	103	55	9
			173	145,97	0,419	87	56	9
	$^{209}_{83}Bi$	$^{229}_{93}Np$	210	191,66	0,574	112	84	9

Projektil	Target	CN	E_{lab} (MeV)	E_{cm} (MeV)	$\frac{\sigma_{cF}}{\sigma_R}$	J_{max} (ħ)	J_{cr} (ħ)	Ref
$^{12}_{6}C$	$^{63}_{29}Cu$	$^{75}_{35}Br$	126	105,84	0,271	56	28	9
	$^{107}_{47}Ag$	$^{119}_{53}I$	126	113,40	0,423	62	40	9
	$^{197}_{79}Au$	$^{209}_{85}At$	126	118,77	0,638	66	52	9
$^{84}_{36}Kr$	$^{165}_{67}Ho$	$^{249}_{103}Lr$	460	305	0,250	170	85	12
	$^{209}_{83}Bi$	$^{293}_{119}$	500	357	0,050	193	42	12
	$^{238}_{92}U$	$^{322}_{128}$	500	370	0,016	181	22	12
	$^{186}_{74}W$	$^{270}_{110}$	502	346	0,152	207	80	12
$^{40}_{18}Ar$	$^{96}_{42}Mo$	$^{136}_{60}Ba$	200	141	0,10	89	28	13
			300	212	0,069	143	37	13
	$^{121}_{51}Sb$	$^{161}_{69}Tm$	162	122	0,229	47	22	13
			179	135	0,223	70	32	13
			199	150	0,408	89	56	13
			226	170	0,330	110	63	13
			300	226	0,262	153	78	13
	$^{165}_{67}Ho$	$^{205}_{85}At$	226	182	0,638	105	83	13
			300	242	0,622	161	126	13
	$^{209}_{83}Bi$	$^{249}_{101}Md$	250	210	0,804	116	104	13
	$^{232}_{90}Th$	$^{272}_{108}$	288	246	0,421	148	96	14
			379	323	0,172	212	88	14
	$^{238}_{92}U$	$^{278}_{110}$	250	214	0,623	108	85	13
			300	257	0,597	157	122	13
$^{84}_{36}Kr$	$^{165}_{67}Ho$	$^{249}_{103}Lr$	450	298	0,250	159	79	13
$^{40}_{18}Ar$	$^{77}_{34}Se$	$^{117}_{52}Te$	205	135		91		

III. Die Drehimpuls-Abhängigkeit des Wirkungsquerschnitts

III. 1. Die Thomas-Formel

Wir haben bereits im Kapitel I erwähnt, daß bei Schwerionen-Reaktionen übe der Coulomb-Barriere zunächst ein Compoundkern gebildet wird, danach zerfällt C gemäß

$$a + A \longrightarrow C \longrightarrow b + B \qquad (3.1)$$

Wir nehmen an, daß Projektil a und Targetkern A in ihrem Grundzustand sind, und $\vec{I}_a = \vec{I}_A = 0$.

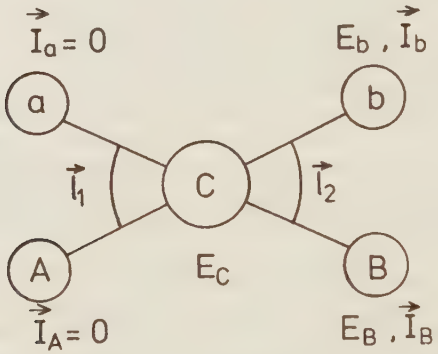


Fig.(3.1): Schema der Reaktion.

$$\vec{S}_2 = \vec{I}_b + \vec{I}_B \quad ; \quad \vec{S}_1 = \vec{I}_a + \vec{I}_A = 0$$

$$\vec{J} = \vec{S}_1 + \vec{\ell}_1 = \vec{\ell}_1 = \vec{S}_2 + \vec{\ell}_2 \qquad (3.2)$$

$$E_B = E_c - Q - E_b - \epsilon \ ,$$

wobei E_B und E_b die Anregungsenergie der Kerne B und b sind. Q ist die

Bindungsenergie, E_c ist die Energie des Compoundkerns, ε ist die kinetische Energie der Relativbewegung. $\vec{I}_a$, $\vec{I}_A$ sind die Spins des Projektils bzw. des Targetkerns. $\vec{I}_b$, $\vec{I}_B$ sind die Spins des emittierten bzw. des Restkerns. $\vec{S}_{1,2}$ ist der Kanalspin, $\vec{\ell}_{1,2}$ ist der Bahndrehimpuls im Eingangs- bzw. Ausgangskanal.

In dieser Reaktion ist der differentielle Wirkungsquerschnitt für die Beobachtung des emittierten Kerns b mit der Anregungsenergie E_b und Spin I_b [15, 16]:

$$\frac{d\sigma(E_b, I_b)}{dE_b} = \frac{\pi}{k^2} \rho(E_b, I_b) \sum_J \frac{(2J+1)}{g(J)} T^J_{l_1=J} P^J(E_b, I_b) \quad , \tag{3.3a}$$

mit

$$P^J(E_b, I_b) := \sum_{I_B=0}^{\infty} \sum_{S_2=|I_B-I_b|}^{|I_B+I_b|} \sum_{l_2=|J-S_2|} \int_{E_B=0}^{(E_B)_{max}} dE_B \, \rho_B(E_B, I_B) \, T^J_{l_2, I_B, I_b, S_2}(\varepsilon) \quad , \tag{3.3b}$$

wobei $\rho_B(E_B, I_B)$ die Niveaudichte des Restkerns bei der Anregungsenergie E_B und Spin I_B ist, $\rho_b(E_b, I_b)$ die Niveaudichte des emittierten Kerns b, T der Transmissionskoeffizient, g(J) ist totale Zerfallswahrscheinlichkeit des Compoundkerns mit Spin J in alle Ausgangskanäle, k ist die Wellenzahl im Eingangskanal. Der Term $\frac{\pi}{k^2} \sum_J (2J+1) T^J_J$ in der Gl. (3.3a) bezieht sich auf die Bildungswahrscheinlichkeit des Compoundkerns, P^J ist die Wahrscheinlichkeit für Zerfall in einen bestimmten Kanal mit Spin J. Zur Berechnung von P^J wird hier eine inverse Reaktion benutzt.

Thomas [15] hat gezeigt

$$g(J) = \frac{(2J+1)}{\pi} G \quad , \tag{3.4}$$

wobei G eine Konstante ist, die nur von der Anregungsenergie des Compoundkerns abhängig ist.

Die Gl. (3.3a) ist eine Verallgemeinerung der von Thomas [15] angegebenen

Formel. Bei der Thomas-Formel werden die emittierten Fragmente als leichte Kerne angesehen, z.B. p,n und α-Teilchen. In dieser Arbeit nehmen wir an, daß sowohl die emittierten als auch die Restfragmente Schwerionen sind. Daher muß die Niveaudichte des emittierten Kerns $\rho_b(E_b,I_b)$ mitberücksichtigt werden.

Die Bedeutung des Ausdrucks "Compoundkern" hängt von der jeweiligen physikalischen Situation ab. Ursprünglich wurde dieser Ausdruck auf einen angeregten Kern angewendet, dessen Lebensdauer lang genug ist, daß Bildung und Zerfall als voneinander unabhängig betrachtet werden können. Bei Kernreaktionen mittlerer Energie bezeichnet dieser Ausdruck einen Kern, dessen Anregungszustand in einem Überlappungsgebiet vieler Niveaus liegt. Die Interferenz dieser Zustände zerstört im allgemeinen die vorausgesetzte Unabhängigkeit zwischen Bildung und Zerfall und verursacht schnelle Fluktuationen der Wirkungsquerschnitte mit Energie und Winkel. Bei Mittelung über ein hinreichend großes Energieintervall heben sich diese Fluktuationen jedoch heraus und der Wirkungsquerschnitt wird eine glatte Funktion von Energie und Winkel. Die Mindestgröße des Intervalles,über die gemittelt wird , ist durch die Lebensdauer des Compoundkerns gegeben. In diesem Fall gibt es also eine gewisse Berechtigung für die Annahme der Entkoppelung von Bildung und Zerfall. Danach kann man den Wirkungsquerschnitt $\sigma(a,b)$ für eine Reaktion, die von den Reaktanten a ausgeht und über einen Compoundkern mit Anregungsenergie E, Drehimpulse J und Parität π zu Endprodukten b führt, in der Form

$$\sigma(a,b) = \sigma_c(a,E,J,\pi) \cdot G(b,E,J,\pi) \qquad (3.5)$$

schreiben, wobei σ_c der Wirkungsquerschnitt für die Bildung des Compoundkernes aus den Reaktanten ist und G die Wahrscheinlichkeit für einen Zerfall in Endprodukte b.

Wir weisen noch einmal darauf hin, daß Gl. (3.5) nur für den gemittelten Wirkungsquerschnitt gilt. In dieser Übersicht werden wir uns ausschließlich

mit Compoundkern-Reaktion im obigen Sinne befassen.

Wenn die Lebensdauer des intermediären Komplexes so kurz ist, daß sich kein statistisches bzw. thermisches Gleichgewicht einstellen kann, dann muß mit einer Abhängigkeit zwischen Bildung und Zerfall gerechnet werden. Die Lebensdauer für typische Schwerionen induzierter Reaktionen liegen zwischen 10^{-20} und 10^{-21} sec, sind also nicht wesentlich viel größer als 3×10^{-23} sec der minimalen Durchgangszeit eines Nukleons durch den Kern. Es ist also nicht a priori klar, daß solche Kerne hinreichend lange existieren, um alle möglichen Konfigurationen einnehmen zu können. Trotz des fraglichen Ausgangspunktes soll in dieser Arbeit die Formel (3.3a) ausgewertet werden, um die Drehimpuls-Abhängigkeit des Wirkungsquerschnitts studieren zu können.

III. 2. Auswertung der Thomas-Formel

III. 2.1 Ansätze zur Auswertung

Der einfachste Ansatz für die Transmissionskoeffizienten zum Bahndrehimpuls ℓ_2 nach der "black box" Näherung ist:

$$T_{\ell_2}(\varepsilon) = \begin{cases} 1 \text{ für } \ell_2 \leq R_T \sqrt{\frac{2\mu}{\hbar^2}(\varepsilon - V_c)} \\ 0 \text{ für } \ell_2 > R_T \sqrt{\frac{2\mu}{\hbar^2}(\varepsilon - V_c)} \end{cases} \tag{3.6a}$$

V_c ist die Coulombwahl, μ ist die reduzierte Masse, $R_T = R_b + R_B$ ist die Summe der Radien der beiden Kerne.

In diesem Fall $\varepsilon \geq \frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{\ell_2^2}{R_T^2} + V_c$

und so $$E_B \leq E_c - Q - E_b - \frac{\hbar^2 \ell_2^2}{2\mu R_T^2} - V_c \,. \tag{3.6b}$$

Wir führen folgende Abkürzungen ein:

$$E_{BO} := E_c - Q - E_b - V_c \tag{3.7a}$$

$$(E_B)_{max} := E_{BO} - \frac{\hbar^2 \ell_2^2}{2\mu R_T^2} \qquad (3.7b)$$

Die Summationen in der Gleichung (3.3b) sind vertauschbar

$$\sum_{0}^{\infty}{}_{I_B} \sum_{|I_B - I_b|}^{|I_B + I_b|} \sum_{|J-S_2|}^{|J+S_2|}{}_{\ell_2} = \sum_{0}^{\infty}{}_{\ell_2} \sum_{|J-\ell_2|}^{|J+\ell_2|} \sum_{|S_2 - I_b|}^{|S_2 + I_b|}{}_{I_B} = \sum_{0}^{\infty}{}_{S_2} \sum_{|J-S_2|}^{|J+S_2|}{}_{\ell_2} \sum_{|S_2 - I_b|}^{|S_2 + I_b|}{}_{I_B} \qquad (3.8)$$

Die Zahl der Niveaus mit einem festen Wert von I_B, die wir mit $\rho_B(E_B, I_B)$ bezeichnen, ist die Differenz zwischen der Zahl der Zustände mit Projektion $M = I_B$, d.h. $W(E_B, M = I_B)$ und der Zahl der Zustände mit Projektion $M = I_B + 1$, d.h. $W(E_B, M = I_B + 1)$, nämlich

$$\rho_B(E_B, I_B) = W(E_B, M = I_B) - W(E_B, M = I_B + 1). \qquad (3.9)$$

Nach Vertauschung der Integration und der Summation in der Gleichung (3.3b) läßt sich $P^J(E_b, I_b)$ mit den Gln. (3.8) und (3.9) folgendermaßen weiter umformen:

$$P^J(E_b, I_b) = \int_0^\infty dE_B \sum_0^\infty \sum_{|J-S_2|}^{|J+S_2|} \sum_{|S_2 - I_b|}^{|S_2 + I_b|} \left[W(E_B, I_B) - W(E_B, I_B + 1) \right] \Theta\left(E_{BO} - \frac{\hbar^2 \ell_2^2}{2\mu R_T^2} - E_B\right)$$

Wenn wir die Summe der beiden Terme in Klammern ausführen, erhalten wir

$$\sum_{|S_2 - I_b|}^{|S_2 + I_b|} \left[W(E_B, I_B) - W(E_B, I_B + 1) \right] = W(E_B, S_2 - I_b) - W(E_B, S_2 + I_b + 1),$$

damit folgt

$$P^J(E_b, I_b) = \int_0^\infty dE_B \sum_0^\infty \sum_{|J-S_2|}^{|J+S_2|} W(E_B, S_2 - I_b)\, \Theta\left(E_{BO} - \frac{\hbar^2 \ell_2^2}{2\mu R_T^2} - E_B\right) - \int_0^\infty dE_B \sum_0^\infty \sum_{|J-S_2|}^{|J+S_2|} W(E_B, S_2 + I_b + 1)\, \Theta\left(E_{BO} - \frac{\hbar^2 \ell_2^2}{2\mu R_T^2} - E_B\right).$$

(3.10)

Wir definieren:

$$F_I^J(E_b,I_b) = \int_0^\infty dE_B \sum_{S_2=0}^{\infty} \sum_{\ell_2=|J-S_2|}^{|J+S_2|} W(E_B,S_2-I_b)\,\Theta\left(E_{B0}-\frac{\hbar^2\ell_2^2}{2\mu R_T^2}-E_B\right)$$

$$F_{II}^J(E_b,I_b) = \int_0^\infty dE_B \sum_{S_2=0}^{\infty} \sum_{\ell_2=|J-S_2|}^{|J+S_2|} W(E_B,S_2+I_b+1)\,\Theta\left(E_{B0}-\frac{\hbar^2\ell_2^2}{2\mu R_T^2}-E_B\right). \qquad (3.11)$$

Die Gleichungen (3.10) und (3.11) lassen sich zusammenfassen zu

$$P^J(E_b,I_b) = F_I^J(E_b,I_b) - F_{II}^J(E_b,I_b) \qquad (3.12)$$

Zur weiteren Rechnung verwenden wir für die Zustandsdichten des Fermigasmodells [17]:

$$W(E_B, S_2-I_b) = K \exp 2\sqrt{a\left(E_B-\frac{(S_2-I_b)^2}{2c}\right)} \qquad (3.13)$$

$$W(E_B, S_2+I_b+1) = K \exp 2\sqrt{a\left(E_B-\frac{(S_2+I_b+1)^2}{2c}\right)},$$

wobei K eine Konstante ist, $C = \frac{\Theta_B}{\hbar^2}$, Θ_B ist das Trägheitsmoment des Kerns B. Wir führen weiter folgende Abkürzungen ein:

$$h = \frac{1}{2c}, \quad g = \frac{\hbar^2}{2\mu R_T^2}, \quad b = 2\sqrt{a}. \qquad (3.14)$$

In der späteren numerischen Auswertung werden wir

$$a = \frac{A_B}{10} \ \mathrm{MeV}^{-1} \qquad (3.15)$$

wählen und für Θ_B das Trägheitsmoment eines starren Körpers [16,17]

$$\Theta_B = \frac{2}{5} m_n A_B R_B^2, \qquad (3.16)$$

m_n ist die Masse des Neutrons. A_B, R_B sind Massenzahl und Radius des Kerns B. Zunächst wollen wir $F_I^J(E_b,I_b)$ diskutieren, weil dieser Term den Hauptbeitrag zur Wahrscheinlichkeit P^J nach Formel (3.12) bzw. (3.10) bringt.

Zur Berechnung von $F^J_{II}(E_b,I_b)$ vergleiche Kapitel III.3 und zur Abschätzung des Fehlers, der durch Vernachlässigung von $F^J_{II}(E_b,I_b)$ gegenüber $F^J_I(E_b,I_b)$ entsteht, siehe die Fehlerdiskussion im Abschnitt IV.

In (3.11) ersetzen wir die Summation durch die Integration, mit (3.13) läßt sich $F^J_I(E_b,I_b)$ weiter umformen:

$$F^J_I(E_b,I_b) = K\int_0^\infty dE_B \iint_G dS_2\, d\ell_2\, e^{b\sqrt{E_B-h(S_2-I_b)^2}}\,\theta(E_{Bo}-g\ell_2^2-E_B)\cdot\theta(E_B-h(S_2-I_b)^2)\cdot \tag{3.17}$$

G ist das Integrationsgebiet in der (S_2,ℓ_2)-Ebene (Fig. (3.2)).

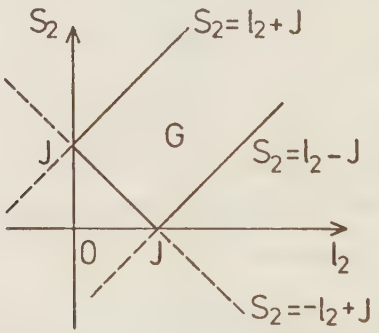


Fig.(3.2): Das Integrationsgebiet G in der (S_2,ℓ_2)-Ebene

Es ist zweckmäßig, den neuen Parameter

$$E' := E_B - h(S_2 - I_b)^2 \tag{3.18}$$

einzuführen. Damit folgt aus (3.17)

$$F^J_I(E_b,I_b) = K\int_0^\infty dE'\; e^{b\sqrt{E'}} \iint_G dS_2\, d\ell_2\, \theta(E_{Bo} - g\ell_2^2 - h(S_2 - I_b)^2 - E'). \tag{3.19}$$

Die θ-Funktion in Gl. (3.19) entspricht einer Ellipse mit den Halbachsen $\left(\sqrt{\frac{E_{Bo}-E'}{g}},\ \sqrt{\frac{E_{Bo}-E'}{h}}\right)$ und Mittelpunkt $(0,I_b)$, d.h. die Integration über S_2, ℓ_2 in (3.19) gilt die Fläche des Teils der Ellipse $\frac{(S_2-I_b)^2}{\frac{E_{Bo}-E'}{h}} + \frac{\ell_2^2}{\frac{E_{Bo}-E'}{g}} = 1$, der im Gebiet G liegt.

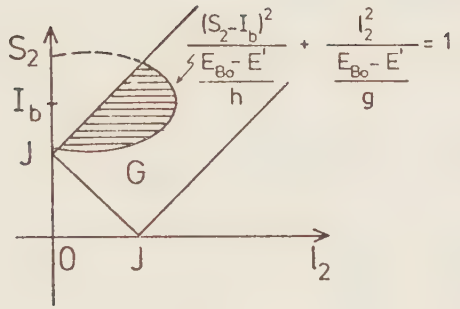


Fig.(3.3): Die Fläche des Teils der Ellipse im Gebiet G.

Wir definieren weiter:

$$f(E'): = \iint_G dS_2\, d\ell_2\, \theta(E_{BO} - g\ell_2^2 - h(S_2 - I_b)^2 - E') \tag{3.20}$$

Die Gleichungen (3.3a), (3.3b), (3.4) und (3.12) lassen sich zusammenfassen zu

$$\frac{d\sigma}{dE_b}(E_b,I_b) = \frac{\pi^2}{k^2}\,\frac{\rho_b(E_b,I_b)}{G}\sum_{J=0}^{\infty} T^J_{l_1=J}\left(F^J_I(E_b,I_b) - F^J_{II}(E_b,I_b)\right). \tag{3.21}$$

Mit der Abkürzung

$$B_{I,II}(E_b,I_b) := \frac{\pi}{G}\sum_{J=0}^{\infty} T^J_{l_1=J}\; F^J_{I,II}(E_b,I_b) \tag{3.22}$$

läßt sich Gl. (3.21) folgendermaßen weiter umformen:

$$\frac{d\sigma}{dE_b}(E_b,I_b) = \frac{\pi}{k^2}\,\rho_b(E_b,I_b)\,(B_I(E_b,I_b) - B_{II}(E_b,I_b)). \tag{3.23}$$

Wir betrachten zunächst den erstenTerm der Gl. (3.23)

$$B_I(E_b,I_b) = \frac{\pi}{G}\sum_{J=0}^{\infty} T^J_{\ell_1=J}\; F^J_I(E_b,I_b) \tag{3.24}$$

mit
$$F^J_I(E_b,I_b) = K\int_0^{\infty} dE'\, e^{b\sqrt{E'}}\, f(E') \tag{3.25}$$

III. 2.2 Die Koordinatentransformation

Um Gl. (3.20) zu berechnen, machen wir folgende Transformation

$$x = \ell_2\sqrt{\frac{g\,h}{g+h}} \quad - (S_2 - I_b)\sqrt{\frac{g\,h}{g+h}}$$
$$y = \ell_2\sqrt{\frac{g^2}{g+h}} \quad + (S_2 - I_b)\sqrt{\frac{h^2}{g+h}} \qquad (3.26)$$

Es ergibt sich

$$\ell_2 = x\sqrt{\frac{h}{g(g+h)}} + \frac{y}{\sqrt{g+h}}$$
$$S_2 - I_b = -x\sqrt{\frac{g}{h(g+h)}} + \frac{y}{\sqrt{g+h}} \qquad (3.27)$$

Die Grenzlinien des Gebietes G (Fig. (3.3)) gehen bei der Transformation über in folgende Geraden:

$$S_2 = \ell_2 + J \Longrightarrow x = \sqrt{\frac{g\,h}{g+h}}\,(I_b - J) \qquad \text{(I)}$$

$$S_2 = \ell_2 - J \Longrightarrow x = \sqrt{\frac{g\,h}{g+h}}\,(I_b + J) \qquad \text{(II)} \qquad (3.28)$$

$$S_2 = -\ell_2 + J \Rightarrow y = \frac{x}{2}\,\frac{g-h}{\sqrt{g\,h}} - \frac{\sqrt{g+h}}{2}(I_b - J) \qquad \text{(III)}$$

und $d\ell_2\, dS_2 = \frac{1}{\sqrt{g\,h}}\, dx\, dy$

Mit der Transformation (3.26) erhalten wir daher aus (3.19)

$$F_I^J(E_b, I_b) = K \int_0^\infty dE'\, e^{b\sqrt{E'}}\, f(E') \qquad (3.29)$$

mit
$$f(E') = \frac{1}{\sqrt{g\,h}} \iint_{G'} dx\, dy\, \Theta(x^2 + y^2 - (E_{Bo} - E')), \qquad (3.30)$$

wobei das Gebiet G' nach der Koordinaten-Transformation durch

$$\sqrt{\frac{g\,h}{g+h}}\,(I_b - J) \;\le\; x \;\le\; \sqrt{\frac{g\,h}{g+h}}\,(I_b + J)$$
$$y - \frac{g-h}{2\sqrt{g\,h}}\,x \;\ge\; -\frac{1}{2}\sqrt{g+h}\,(I_b - J) \qquad (3.31)$$

gegeben ist.

Die Integration (3.30) bedeutet Berechnung der Fläche, die der Kreis $x^2 + y^2 = E_{Bo} - E'$ aus dem Gebiet G' herausschneidet, d.h. die schraffierte Fläche in Fig. (3.4).

Fig. (3.4) illustriert die Fläche des Teils vom Kreis $x^2 + y^2 = r^2 = E_{Bo}-E'$ im Gebiet G', nach der Koordinatentransformation. Im Fall a) ist $I_b>J$, d.h. Linie (I) liegt in der rechten Halbebene. Im Fall b) ist $g>h$, d.h. die Gerade (III) steigt. Im Fall c) ist $h\, I_b>gJ$, d.h. die Schnittpunkte A und B liegen in der unteren Halbebene.

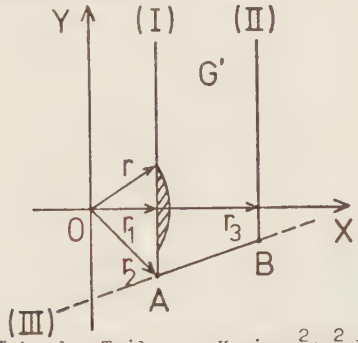


Fig.(3.4): Die Fläche des Teils vom Kreis $x^2+y^2=E_{Bo}-E'$ im Gebiet G'.

Wir definieren folgende Parameter:

$$\begin{aligned} r_1 &:= \sqrt{\frac{gh}{g+h}}\,(I_b-J) \\ r_2 &:= \sqrt{h}\,(I_b-J) = \sqrt{\frac{g+h}{g}}\; r_1 \\ r_3 &:= \sqrt{\frac{gh}{g+h}}\,(I_b+J) \\ r &:= \sqrt{E_{Bo}-E'} \end{aligned} \qquad (3.32)$$

Die Schnittpunkte der Linien (I), (II) mit der Linie (III) sind

$$A = (x = r_1,\ y = -\sqrt{\frac{h}{g}}\, r_1),\quad B = (x = r_3,\ y = -\frac{h\, I_b - gJ}{\sqrt{gh}}) .$$

Weiterhin definieren wir E_1, E_2 und E_3:

$$\begin{aligned} &E_1 \text{ definiert durch } r_1^2 = \frac{gh}{g+h}(I_b-J)^2 = E_{Bo}-E_1 \Rightarrow E_1 = E_{Bo} - \frac{gh}{g+h}(I_b-J)^2 \\ &E_2 \text{ definiert durch } r_2^2 = h(I_b-J)^2 = E_{Bo}-E_2 \Rightarrow E_2 = E_{Bo} - h\,(I_b-J)^2 \\ &E_3 \text{ definiert durch } r_3^2 = \frac{gh}{g+h}(I_b+J)^2 = E_{Bo}-E_3 \Rightarrow E_3 = E_{Bo} - \frac{gh}{g+h}(I_b+J)^2 \end{aligned} \qquad (3.33)$$

In den nächsten Abschnitten werden wir f(E') für drei Fälle:

(a) $r_1 \leq r \leq r_2$ oder $E_2 \leq E' \leq E_1$

(b) $r_2 \leq r \leq r_3$ oder $E_3 \leq E' \leq E_2$

(c) $r_3 \leq r$ oder $E' \leq E_3$

berechnen.

Wobei $r_1 < r_2 < r_3$ oder $E_3 < E_2 < E_1 < E_{Bo}$ angenommen ist.

III. 2.3 Berechnung von f(E') für den Fall $E_2 \leq E' \leq E_1$

$E_2 \leq E' \leq E_1$ oder $r_1 \leq r \leq r_2$

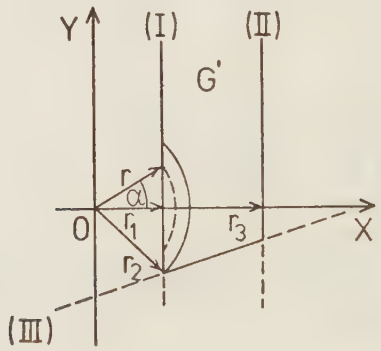


Fig.(3.5): Der Fall $r_1 \leq r \leq r_2$

$$f(E') = \frac{1}{\sqrt{gh}} \left(r^2 \arcsin \frac{\sqrt{r^2 - r_1^2}}{r} - r_1 \sqrt{r^2 - r_1^2}\right). \tag{3.34}$$

Sofern

$$\sqrt{r^2 - r_1^2} < r_1 < r$$

$$r - r_1 < r_1 < r \tag{3.35}$$

kann der arc sin in eine Reihe entwickelt werden und man erhält:

$$f(E') = \frac{1}{\sqrt{gh}} \left\{ r\sqrt{r^2 - r_1^2} + \frac{1}{6}\frac{(r^2 - r_1^2)^{3/2}}{r} + \frac{3}{40}\frac{(r^2 - r_1^2)^{5/2}}{r^3} + \cdots - r_1\sqrt{r^2 - r_1^2} \right.$$

$$= \frac{1}{\sqrt{gh}} \left\{ (r - r_1)\sqrt{r^2 - r_1^2} + \frac{1}{6}\frac{(r^2 - r_1^2)^{3/2}}{r} + \frac{3}{40}\frac{(r^2 - r_1^2)^{5/2}}{r^3} + \cdots \right\}$$

$$f(E') = \frac{1}{\sqrt{gh}} \left\{ (r^2 - r_1^2)^{3/2} \left(\frac{1}{r + r_1} + \frac{1}{6r} \right) + \frac{3}{40} \frac{(r^2 - r_1^2)^{5/2}}{r^3} + \cdots \right\}$$

für $r - r_1 < 2 r_1$

$$(r + r_1)^{\gamma} = (2r_1 + r - r_1)^{\gamma} \approx (2r_1)^{\gamma} \left(1 + \gamma \frac{r - r_1}{2r_1} + \cdots \right)$$

für $r^2 - r_1^2 < r_1^2$

$$r^{\mu} = r_1^{\mu} \left(1 + \frac{r^2 - r_1^2}{r_1^2}\right)^{\mu/2} \approx r_1^{\mu} \left(1 + \frac{\mu}{2} \frac{r^2 - r_1^2}{r_1^2} + \cdots \right)$$

$$f(E') \approx \frac{1}{\sqrt{gh}} \left[(r^2 - r_1^2)^{3/2} \left\{ \frac{1}{2r_1} \left(1 - \frac{r - r_1}{2r_1} + \cdots \right) + \frac{1}{6} \frac{1}{r_1} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{r^2 - r_1^2}{r_1^2} + \cdots \right) \right\} + O\left((r^2 - r_1^2)^{5/2}\right) \right]$$

$$f(E') = \frac{1}{\sqrt{gh}} \left\{ \frac{2}{3} \frac{(r^2 - r_1^2)^{3/2}}{r_1} + O\left((r^2 - r_1^2)^{5/2}\right) \right\}$$

$$f(E') \approx \frac{2}{3\sqrt{gh}} \frac{(r^2 - r_1^2)^{3/2}}{r_1} . \qquad (3.36)$$

Wir setzen (3.32) und (3.33) in (3.36) ein, so erhalten wir

$$f(E') = \frac{2}{3} \frac{(E_1 - E')^{3/2}}{\sqrt{gh}(E_{Bo} - E_1)} . \qquad (3.37)$$

Gl. (3.37) ist gute Approximation, wenn $\frac{E_1 - E'}{E_{BO} - E_1}$ oder $\frac{r^2 - r_1^2}{r_1^2}$ klein ist.(Siehe (3.35)).

I. 2.4 Berechnung von f(E') für den Fall $E_3 \leq E' \leq E_2$

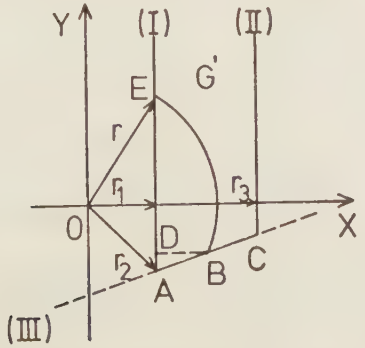


Fig.(3.6): Der Fall $r_2 \leq r \leq r_3$.

Die Schnittpunkte, welche die Fläche f(E') bestimmen, sind nach Figur (3.6):

$$A = \left(x_A = r_1 , y_A = -\sqrt{\frac{h}{g}}\, r_1 \right) , \qquad C = \left(x_C = r_3 , y_C = -\frac{hI_b - gJ}{\sqrt{g+h}} \right)$$

$$B = \left(x_B = \frac{g-h}{g+h} r_1 + \frac{2\sqrt{gh}}{g+h}\sqrt{r^2 - r_1^2} , y_B = -\frac{2\sqrt{gh}}{g+h} r_1 + \frac{g-h}{g+h}\sqrt{r^2 - r_1^2} \right)$$

$$D = \left(x_D = r_1 , y_D = -\frac{2\sqrt{gh}}{g+h} r_1 + \frac{g-h}{g+h}\sqrt{r^2 - r_1^2} \right)$$

$$E = \left(x_E = r_1 , y_E = \sqrt{r^2 - r_1^2} \right)$$

$f(E') = \frac{1}{\sqrt{gh}}$ (Fläche ABD + Fläche DBE)

Man kann die Flächen einfach ausrechnen

$$\text{Fläche DBE} = \frac{r^2}{2} \arcsin \frac{2\sqrt{gh}}{g+h} - \frac{4h\sqrt{gh}}{(g+h)^2} r_1^2 - \frac{\sqrt{gh}(g-h)}{(g+h)^2} r^2 + \frac{2h(g-h)}{(g+h)^2} r_1 \sqrt{r^2 - r_1^2}$$

$$\text{Fläche ABD} = -\frac{2h(g-h)}{(g+h)^2} r_1 \sqrt{r^2 - r_1^2} + \frac{(g-h)\sqrt{gh}}{(g+h)^2} r^2 - \frac{(g-h)^2\sqrt{gh}}{g(g+h)^2} r_1^2$$

Unter Beachtung

$$\arcsin \frac{2\sqrt{gh}}{g+h} = 2 \arcsin \sqrt{\frac{h}{g+h}} , \qquad (3.38)$$

damit folgt

$$f(E') = \frac{1}{\sqrt{gh}} \left\{ r^2 \arcsin \sqrt{\frac{h}{g+h}} - r_1^2 \sqrt{\frac{h}{g}} \right\} . \qquad (3.39)$$

Wir setzen (3.32) und (3.33) in (3.39) ein, so erhalten wir

$$f(E') = \frac{1}{\sqrt{gh}} \left\{ (E_{Bo} - E') \arcsin \sqrt{\frac{h}{g+h}} - (E_{Bo} - E_1) \sqrt{\frac{h}{g}} \right\} . \qquad (3.40)$$

III. 2.5 Berechnung von f(E') für den Fall $E' < E_3$

Im Fall: $E' < E_3$ oder $r > r_3$

und $I_b > J$, $g > h$, $h I_b > gJ$

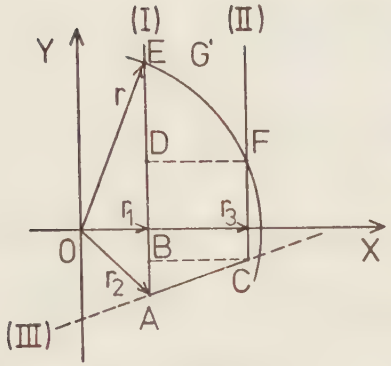


Fig. (3.7): Der Fall $r > r_3$

Die Schnittpunkte, welche die Fläche f(E') bestimmen, sind nach Fig. (3.7):

$$A = (x = r_1,\ y = -\sqrt{\frac{h}{g}}\, r_1) \qquad F = (x = r_3,\ y = \sqrt{r^2 - r_3^2})$$

$$C = (x = r_3,\ y = -\frac{hI_b - gJ}{\sqrt{g+h}}) \qquad D = (x = r_1,\ y = \sqrt{r^2 - r_3^2})$$

$$B = (x = r_1,\ y = -\frac{hI_b - gJ}{\sqrt{g+h}}) \qquad E = (x = r_1,\ y = \sqrt{r^2 - r_1^2})$$

$$f(E') = \frac{1}{\sqrt{gh}} \{\text{Fläche ABC + Fläche BDFC + Fläche DEF}\}$$

Auch diese Flächen sind leicht zu berechnen

$$\text{Fläche ABC} = \frac{J(g-h)}{2\sqrt{g+h}}(r_3 - r_1)$$

$$\text{Fläche BDFC} = (\sqrt{r^2 - r_3^2} + \frac{hI_b - gJ}{\sqrt{g+h}})(r_3 - r_1)$$

$$\text{Fläche DEF} = \frac{r^2}{2}\arcsin\left(\frac{r_3\sqrt{r^2 - r_1^2} - r_1\sqrt{r^2 - r_3^2}}{r^2}\right) - \frac{1}{2}r_1\sqrt{r^2 - r_1^2} - \frac{1}{2}r_3\sqrt{r^2 - r_3^2} + r_1\sqrt{r^2 - r_3^2}$$

Zusammengefaßt ergibt sich schließlich

$$f(E') = \frac{1}{\sqrt{gh}}\left\{\frac{r^2}{2}\arcsin\left(\frac{r_3\sqrt{r^2 - r_1^2} - r_1\sqrt{r^2 - r_3^2}}{r^2}\right) + \frac{r_3\sqrt{r^2 - r_3^2}}{2} - \frac{r_1\sqrt{r^2 - r_1^2}}{2} + \frac{2hI_b - J(g+h)}{2\sqrt{g+h}}(r_3 - r_1)\right\} \quad (3.41)$$

Mit (3.32) und (3.33) erhalten wir

$$f(E') = \frac{1}{\sqrt{gh}}\left\{\frac{E_{Bo} - E'}{2}\arcsin\frac{\sqrt{(E_{Bo} - E_3)(E_1 - E')} - \sqrt{(E_{Bo} - E_1)(E_3 - E')}}{E_{Bo} - E'} + \frac{\sqrt{(E_{Bo} - E_3)(E_3 - E')}}{2}\right. \quad (3.42)$$

$$\left. - \frac{\sqrt{(E_{Bo} - E_1)(E_1 - E')}}{2} + \frac{2hI_b - J(g+h)}{2\sqrt{g+h}}\left(\sqrt{E_{Bo} - E_3} - \sqrt{E_{Bo} - E_1}\right)\right\}.$$

III. 2.6 Die Näherungsauswertung der Thomas-Formel

Nach den Ergebnissen (3.37), (3.40) und (3.42) gilt:

für I) $E_2 \le E' \le E_1$:

$$f_{I}(E') = \frac{2}{3}\,\frac{(E_1 - E')^{3/2}}{\sqrt{gh(E_{B0} - E_1)}} \sim (E_1 - E')^{3/2}$$

II) $E_3 \le E' \le E_2$:

$$f_{II}(E') = \frac{1}{\sqrt{gh}}\left\{(E_{B0} - E')\arcsin\sqrt{\frac{h}{g+h}} - \sqrt{\frac{h}{g}}(E_{B0} - E_1)\right\} \sim (E_{B0} - E')^{1}$$

III) $E' \le E_3$:

$$f_{III}(E') = \frac{1}{\sqrt{gh}}\left\{\frac{E_{B0} - E'}{2}\arcsin\frac{\sqrt{(E_{B0} - E_3)(E_1 - E')} - \sqrt{(E_{B0} - E_1)(E_3 - E')}}{E_{B0} - E'}\right.$$

$$+ \frac{\sqrt{(E_{B0} - E_3)(E_3 - E')}}{2} - \frac{\sqrt{(E_{B0} - E_1)(E_1 - E')}}{2}$$

$$\left. + \frac{2hI_b - J(g+h)}{2\sqrt{g+h}}\left(\sqrt{E_{B0} - E_3} - \sqrt{E_{B0} - E_1}\right)\right\}$$

$$\sim f\left(\sqrt{E_1 - E'} + \sqrt{E_3 - E'}\right) \qquad (3.43)$$

Es folgt das in Fig. (3.8) wiedergegebene qualitative Verhalten von f(E').

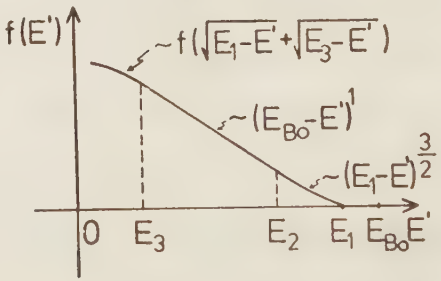


Fig. (3.8): Das grobe Verhalten von f(E') als Funktion von E'.

Die Berechnung des Wirkungsquerschnitts (3.3a) mit den exakten Werten für f(E') nach Formel (3.43) ist im allgemeinen nur mit numerischen Methoden möglich. Im folgenden wird eine Näherung für f(E') eingeführt, die schließlich zu einer Approximation der Thomas-Formel durch einen analytischen Ausdruck führt. Die Fehler, die sich aus dieser Näherung der Funktion f(E') durch ein $f_{app}(E')$ ergeben, werden ebenfalls im Abschnit IV abgeschätzt.

Weiterhin machen wir folgende Näherungen:

1) "Black box"-Näherung für T_J^J : $T_J^J = \begin{cases} 1 \text{ für } J \leq J_{max}^{ein} \\ 0 \text{ für } J > J_{max}^{ein} \end{cases}$,

J_{max}^{ein} ist der totale maximale Bahndrehimpuls im Eingangskanal.

2) Die Summation wird durch Integration ersetzt.

3) f(E') wird durch $f_{app}(E')$ ersetzt, wobei $f_{app}(E')$ durch

$$f_{app}(E') = \begin{cases} f_{II}(E') \text{ für } & 0 \leq E' \leq \hat{E}_1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

definiert wird, $\hat{E}_1$ ist die Nullstelle von $f_{II}(E')$, d.h. $f_{II}(\hat{E}_1) = 0$ (siehe Fig. (3.9)).

$$\hat{E}_1 = E_{Bo} - \frac{\sqrt{\frac{h}{g}}\,(E_{Bo} - E_1)}{\arcsin\sqrt{\frac{h}{g+h}}} \quad . \tag{3.44}$$

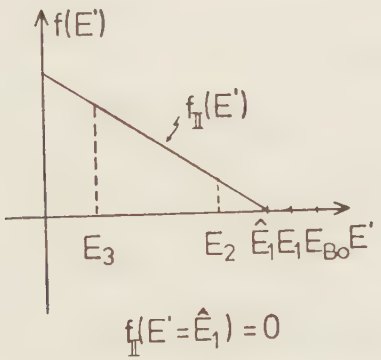


Fig. (3.9): Der Verlauf von $f_{II}(E')$.

Damit folgt aus (3.24) und (3.25):

$$B_{I_{app.}}(E_b, I_b) = \frac{\pi}{G} \int_0^{J_{max}} dJ \; F^J_{I_{app.}}(E_b, I_b) \quad , \tag{3.45}$$

mit

$$F^J_{I_{app}}(E_b, I_b) = K \int_{E'=0}^{\hat{E}_1} dE' \; e^{b\sqrt{E'}} \; f_{II}(E') \quad . \tag{3.46}$$

Die Auswertung der Intergrale wird im Anhang I durchgeführt.

Das Resultat ist:

$$F^{J}_{I\,app}(E_b, I_b) = \frac{K}{\sqrt{gh}} \; \frac{2\arcsin\sqrt{\frac{h}{g+h}}}{b^4} \left\{ (x^2-6) + 2e^x (x^2-3x+3) \right\} \Big|_{x = b\sqrt{\hat{E}_1}}$$

$$F^{J}_{I\,app}(E_b, I_b) = \frac{K}{\sqrt{gh}} \; \frac{2\arcsin\sqrt{\frac{h}{g+h}}}{b^4} \; H(x) \Big|_{x = b\sqrt{\hat{E}_1}} , \qquad (3.47)$$

mit $H(x(J)) := (x^2-6) + 2e^x (x^2 - 3x + 3)$. (3.48)

Wir setzen (3.47) in (3.45) ein, damit erhalten wir

$$B_{I\,app}(E_b, I_b) = \frac{\pi K}{G} \; \frac{2\arcsin\sqrt{\frac{h}{g+h}}}{\sqrt{gh}\; b^4} \int_{J=0}^{J_{max}} dJ \; H(x(J)) \Big|_{x = b\sqrt{\hat{E}_1}} \qquad (3.49)$$

H(x) hat ein wohldefiniertes Maximum in x und damit in J. Mit Hilfe der Sattelpunktsmethode ergibt sich (die ausführliche Berechnung wird im Anhang II durchgeführt)

$$H(x(J)) \approx H(\tilde{x}) \Big|_{\tilde{x} = b\sqrt{E_{Bo}}} \cdot \exp - \left\{ \frac{2\,b^2}{\arcsin\sqrt{\frac{h}{g+h}}} \sqrt{\frac{h}{g}} \; \frac{gh}{g+h} \cdot \frac{1+e^{\tilde{x}}(\tilde{x}-1)}{H(\tilde{x})} \Big|_{\tilde{x} = b\sqrt{E_{Bo}}} \; \frac{(J-I_b)^2}{2} \right\} . \qquad (3.50)$$

mit $H(\tilde{x}) = (\tilde{x}^2-6) + 2e^{\tilde{x}} (\tilde{x}^2 - 3\tilde{x} + 3)$.

Nach Gl. (3.14) und (3.15) setzen wir, wie gesagt:

$$b = 2\sqrt{\frac{A_B}{10}} \; \mathrm{MeV}^{-1/2}. \qquad (3.51)$$

In unseren Beispielrechnungen werden folgende vier Reaktionen

$$\begin{aligned} {}^{39}K &\longrightarrow {}^{12}C + {}^{27}Al \\ {}^{117}Te &\longrightarrow {}^{40}Ar + {}^{77}Se \\ {}^{205}At &\longrightarrow {}^{40}Ar + {}^{165}Ho \\ {}^{209}At &\longrightarrow {}^{12}C + {}^{197}Au \end{aligned} \qquad (3.52)$$

berechnet, und zwar sind A_B = 27, 77, 165, 197.

b hat die Werte 3,3 ,5,5 ,8,1 und 8,9 $MeV^{-1/2}$. Für nicht zu kleine Werte von E_{Bo} ist $e^{b\sqrt{E_{Bo}}}$ der führende Term von (3.50). Weiterhin dürfen wir folgende Näherung machen:

$$H(\tilde{x}) \approx 2\, e^{\tilde{x}}\, \tilde{x}\, (\tilde{x} - 3)$$
$$1 + e^{\tilde{x}}\, (\tilde{x} - 1) \approx e^{\tilde{x}}\, \tilde{x} \qquad (3.53)$$

Mit (3.53), (3.50) und (3.49) ergibt sich für $B_{Iapp}(E_b, I_b)$:

$$B_{Iapp}(E_b, I_b) = \frac{\pi K}{G} \frac{4 \arcsin\sqrt{\frac{h}{g+h}}}{\sqrt{gh}\; b^3} (bE_{Bo} - 3\sqrt{E_{Bo}})\, e^{b\sqrt{E_{Bo}}} \int_{J=0}^{J_{max}} dJ \exp - \left\{ \frac{b^2}{\arcsin\sqrt{\frac{h}{g+h}}} \sqrt{\frac{h}{g}} \frac{gh}{g+h} \frac{(I_b - J)^2}{2(b\sqrt{E_{Bo}} - 3)} \right\}$$

Wir führen folgende Abkürzungen ein

$$\tilde{\alpha} := \frac{4 \arcsin\sqrt{\frac{h}{g+h}}}{\sqrt{gh}\; b^3} (bE_{Bo} - 3\sqrt{E_{Bo}})$$

$$\tilde{\beta} := \frac{b^2}{\arcsin\sqrt{\frac{h}{g+h}}} \sqrt{\frac{h}{g}} \frac{gh}{g+h} \frac{1}{2(b\sqrt{E_{Bo}} - 3)} \quad , \qquad (3.54)$$

damit folgt

$$B_{Iapp}(E_b, I_b) = \frac{\pi K}{G} \tilde{\alpha}\, e^{b\sqrt{E_{Bo}}} \int_{J=0}^{J_{max}} dJ \exp - \tilde{\beta} (I_b - J)^2 . \qquad (3.55)$$

$$\int_{J=0}^{J_{max}} dJ\, e^{-\tilde{\beta}(I_b - J)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\tilde{\beta}}} \left\{ erf(\sqrt{\tilde{\beta}}\, I_b) + erf\sqrt{\tilde{\beta}} (J_{max} - I_b) \right\} . \qquad (3.56)$$

Mit (3.55) und (3.56) ergibt sich für $B_{Iapp}(E_b, I_b)$:

$$B_{Iapp}(E_b, I_b) = \frac{\pi K}{G} \frac{\tilde{\alpha}}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\tilde{\beta}}}\, e^{b\sqrt{E_{Bo}}} \left\{ erf(\sqrt{\tilde{\beta}}\, I_b) + erf\sqrt{\tilde{\beta}} (J_{max} - I_b) \right\} . \qquad (3.57)$$

Nach diesen Näherungsrechnungen kann also der Term B_I im Wirkungsquerschnitt (3.23) durch den Näherungsausdruck B_{Iapp} nach Formel (3.57) ersetzt werden. Wir erhalten bei Vernachlässigung von B_{II} damit die folgende analytische Approximation der Thomas-Formel

$$\boxed{\frac{d\sigma}{dE_b}(E_b,I_b) \approx \frac{\pi^2 K}{k^2 G}\rho(E_b,I_b)\frac{\tilde{\alpha}}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\tilde{\beta}}}\, e^{b\sqrt{E_{Bo}}}\left\{\operatorname{erf}\sqrt{\tilde{\beta}}\, I_b + \operatorname{erf}\sqrt{\tilde{\beta}}(J_{max}-I_b)\right\}} \qquad (3.58)$$

($\tilde{\alpha},\tilde{\beta}$ siehe (3.54))

Die Frage, wann die benutzten Näherungen und Vernachlässigungen gut sind, wird im Abschnitt IV ausführlicher diskutiert. Wir werden im Abschnitt IV.7 beispielsweise zeigen, daß für nicht - zu kleine Werte von I_b der zweite Term von Gl. (3.23) im Vergleich zum erstenTerm nur einen kleinen Beitrag liefert. Bei dem Zerfall $^{205}At \longrightarrow {}^{40}Ar + {}^{165}Ho$ z.B. ist der Fehler auf Grund der Vernachlässigung von B_{II} für $I_b = 20\hbar$ und $E_{Bo} = 50$ MeV sicher kleiner als 5 %.

III. 3. Die Berechnung von $B_{II}(E_b,I_b)$

Die Näherungsberechnung von $B_{Iapp}(E_b,I_b)$ wurde im obigen Abschnitt durchgeführt, wir haben schon erwähnt, daß der Beitrag von $B_{II}(E_b,I_b)$ im Vergleich zu $B_{Iapp}(E_b,I_b)$ für $I_b > 20\,\hbar$ vernachlässigbar ist, aber wegen der weiteren Rechnungen in späteren Kapiteln IV.6 sollen wir doch hier noch die ausführlichen Berechnungen von $B_{II}(E_b,I_b)$ behandeln.

III. 3.1 Die mathematische Behandlung

Aus den Gleichungen (3.11), (3.13) und (3.22) unter Beachtung von Gl. (3.14) ist:

$$B_{II}(E_b,I_b) = \frac{\pi}{G}\sum_{J=0}^{\infty} T^J_{\ell_1=J}\, F^J_{II}(E_b,I_b)$$

mit (3.59)

$$F^J_{II}(E_b,I_b) = \int dE_B \sum_{S_2}^{\infty}\sum_{\ell_2}^{|J+S_2|} W(E_B,S_2+I_b+1)\,\Theta(E_{Bo}-g\ell_2^2-E_B)$$

$$W(E_B, S_2 + I_b + 1) = K \exp b \sqrt{E_B - h\,(S_2 + I_b + 1)^2}$$

Analog zu F_I^J ersetzen wir hier die Summation in (3.59) durch eine Integration

$$F_{II}^J(E_b, I_b) = K \int_{E_B=0}^{\infty} dE_B \iint_G dS_2\, dl_2\, e^{b\sqrt{E_B - h(S_2+I_b+1)^2}} \quad \Theta(E_{Bo} - g l_2^2 - E_B)\,\Theta(E_B - h(S_2+I_b+1)^2)$$

Wir definieren

$$E'' := E_B - h(S_2 + I_b + 1)^2 \tag{3.60}$$

$$F_{II}^J(E_b, I_b) = K \int_{E''=0}^{\infty} dE''\, e^{b\sqrt{E''}} \iint_G dS_2\, dl_2\, \Theta(E_{Bo} - E'' - g l_2^2 - h(S_2+I_b+1)^2). \tag{3.61}$$

Wir führen die Abkürzung

$$f(E'') := \iint_G dS_2\, dl_2\, \Theta\,(E_{Bo} - E'' - g l_2^2 - h(S_2 + I_b + 1)^2) \tag{3.62}$$

ein.

Die Θ-Funktion in Gl. (3.62) entspricht einer Ellipse mit den Halbachsen $\left(\sqrt{\frac{E_{Bo}-E''}{g}}, \sqrt{\frac{E_{Bo}-E''}{h}}\right)$ und dem Mittelpunkt $(0, -(I_b + 1))$. Der Zusammenhang zwischen der Gl. (3.20) und (3.62) kann durch folgende graphische Datstellung veranschaulicht werden.

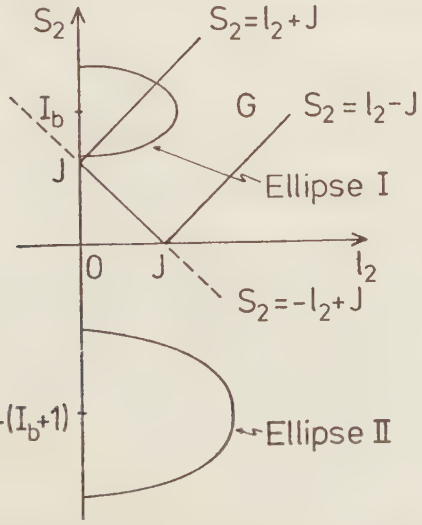


Fig. (3.10): Die beiden Ellipsen in der S_2 - l_2-Ebene.

Ellipse I:
$$\frac{l_2^2}{\left(\sqrt{\frac{E_{Bo}-E'}{g}}\right)^2} + \frac{(S_2 - I_b)^2}{\left(\sqrt{\frac{E_{Bo}-E'}{h}}\right)^2} = 1$$

Ellipse II:
$$\frac{l_2^2}{\left(\sqrt{\frac{E_{Bo}-E''}{g}}\right)^2} + \frac{(S_2 + I_b + 1)^2}{\left(\sqrt{\frac{E_{Bo}-E''}{h}}\right)^2} = 1$$

$E_{Bo} - E' < E_{Bo} - E''$, da $E' > E''$ ist.

Analog zu den Rechnungen im Abschnitt III.2.2 machen wir folgende Transformation:

$$\begin{aligned} x &= l_2 \sqrt{\frac{gh}{g+h}} - (S_2 + I_b + 1)\sqrt{\frac{gh}{g+h}} \\ y &= l_2 \sqrt{\frac{g^2}{g+h}} + (S_2 + I_b + 1)\sqrt{\frac{h^2}{g+h}} \end{aligned} \qquad (3.63)$$

damit folgt

$$\begin{aligned} l_2 &= x\sqrt{\frac{h}{g(g+h)}} + \frac{y}{\sqrt{g+h}} \\ S_2+I_b+1 &= -x\sqrt{\frac{g}{h(g+h)}} + \frac{y}{\sqrt{g+h}} \end{aligned} \qquad (3.64)$$

$$dl_2\, dS_2 = \frac{1}{\sqrt{gh}}\, dx\, dy$$

$$S_2 = l_2 + J \Longrightarrow x = -(I_b + 1 + J)\sqrt{\frac{gh}{g+h}} \qquad \text{(I)}$$

$$S_2 = l_2 - J \Longrightarrow x = -(I_b + 1 - J)\sqrt{\frac{gh}{g+h}} \qquad \text{(II)} \qquad (3.65)$$

$$S_2 = -l_2 + J \Longrightarrow y = -\frac{h-g}{2\sqrt{gh}}x + \frac{\sqrt{g+h}}{2}(I_b + 1 + J) \qquad \text{(III)}$$

Nach der Transformation (3.63) ergibt sich daher aus (3.62)

$$f(E'') = \frac{1}{\sqrt{gh}} \iint_{G''} dx\, dy\ (E_{Bo} - E'' - x^2 - y^2) \qquad (3.66)$$

Die Integration (3.66) bedeutet Berechnung der Fläche, die der Kreis $x^2 + y^2 = E_{Bo} - E''$ aus dem Gebiet G'' herausschneidet (Fig. (3.11)), das Gebiet G'' nach der Koordinaten-Transformation durch :

$$-(I_b+1+J)\sqrt{\frac{gh}{g+h}} \le x \le -(I_b+1-J)\sqrt{\frac{gh}{g+h}}$$
$$y + \frac{h-g}{2\sqrt{gh}}\, x \ge \frac{\sqrt{g+h}}{2}(I_b+1+J) \qquad (3.67)$$

gegeben ist.

Wir definieren weiter:

$$R_1 := (I_b + 1 + J)\sqrt{\frac{gh}{g+h}}$$
$$R_2 := (I_b + 1 + J)\sqrt{h}$$
$$R_3 := (I_b + 1 - J)\sqrt{\frac{gh}{g+h}} \qquad (3.68)$$
$$R_4 := \sqrt{h(I_b + 1)^2 + g J^2}$$
$$R := \sqrt{E_{Bo} - E''}$$

Fig. (3.10) zeigt die Fläche des Teils vom Kreis $x^2 + y^2 = E_{Bo} - E''$ im Gebiet G" die schraffierte Fläche. Im Fall a) $R_4 \le R \le R_2$,

b) $I_b > J$, d.h. die Linien I und II liegen auf der linken Halbebene,

c) h>g, d.h. die Linie III hat negative Tangente.

Für h>g kann man einfach zeigen, daß $R_3 < R_1 < R_4 < R_2$.

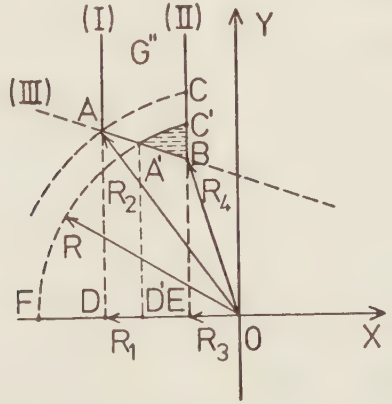


Fig.(3.11): Die Fläche des Teils des Kreisesim Gebiet G", für $R_4 \le R \le R_2$.

Es ist zweckmäßig, die neuen Parameter E_1'', E_2'', E_3'' und E_4'' einzuführen:

$$
\begin{aligned}
&E_1'' \text{ definiert durch } R_1^2 = E_{Bo} - E_1'' = \frac{gh}{g+h}(I_b+1+J)^2 \Longrightarrow E_1'' = E_{Bo} - \frac{gh}{g+h}(I_b+1+J)^2 \\
&E_2'' \text{ definiert durch } R_2^2 = E_{Bo} - E_2'' = h(I_b+1+J)^2 \Longrightarrow E_2'' = E_{Bo} - h(I_b+1+J)^2 \\
&E_3'' \text{ definiert durch } R_3^2 = E_{Bo} - E_3'' = \frac{gh}{g+h}(I_b+1-J)^2 \Longrightarrow E_3'' = E_{Bo} - \frac{gh}{g+h}(I_b+1-J)^2 \\
&E_4'' \text{ definiert durch } R_4^2 = E_{Bo} - E_4'' = h(I_b+1)^2 + gJ^2 \Longrightarrow E_4'' = E_{Bo} - h(I_b+1)^2 - gJ^2
\end{aligned}
\tag{3.69}
$$

Für $f(E'') \geq 0$ und $R_3 < R_1 < R_4 < R_2$ gibt es zwei Fälle:

(1) $R_4 \leq R \leq R_2$ oder $E_2'' \leq E'' \leq E_4''$

(2) $R_2 \leq R$ oder $E'' \leq E_2''$.

Zunächst wird $f(E'')$ für den Fall $R_4 \leq R \leq R_2$ berechnet.

III. 3.2 Berechnungen von $f(E'')$ für $E_2'' \leq E'' \leq E_4''$

Die Schnittpunkte, welche die Fläche $f(E'')$ bestimmen, sind nach Fig.(3.11):

$$
\begin{aligned}
&A \equiv (X_A = -R_1,\ y_A = \sqrt{\frac{h}{g}}R_1) \\
&B \equiv (X_B = -R_3,\ y_B = \sqrt{R_4^2 - R_3^2} = \sqrt{\frac{h}{g}}R_3 + J\sqrt{g+h} = \frac{h-g}{2\sqrt{gh}}R_3 + \frac{g+h}{2\sqrt{gh}}R_1) \\
&C \equiv (X_C = -R_3,\ y_C = \sqrt{R_2^2 - R_3^2}) \\
&C' \equiv (X_{C'} = -R_3,\ y_{C'} = \sqrt{R^2 - R_3^2}) \\
&A' \equiv (X_{A'} = -(\frac{2\sqrt{gh}}{g+h}\sqrt{R^2 - R_1^2} - \frac{h-g}{g+h}R_1) = -|X_{A'}|\ ,\ y_{A'} = \frac{2\sqrt{gh}}{g+h}R_1 + \frac{h-g}{g+h}\sqrt{R^2 - R_1^2}).
\end{aligned}
\tag{3.70}
$$

Die Fläche $f(E'')$ für $E_2'' \leq E'' \leq E_4''$ nennen wir $f_I(E'')$

$$
f_I(E'') = \frac{1}{\sqrt{gh}} \text{ Fläche } A'C'B
$$

$$
f_I(E'') = \frac{1}{\sqrt{gh}} \int_{x=x_{A'}}^{x_{C'}} dx \int_{y=-\frac{h-g}{2\sqrt{gh}}x + \frac{g+h}{2\sqrt{gh}}R_1}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy
$$

Unter Beachtung der Gln. (3.69), (3.70) und die Relation

$$
y_{A'} + y_B = \frac{h-g}{2\sqrt{gh}}(|X_{A'}| + R_3) + \frac{g+h}{\sqrt{gh}}R_1
$$

erhalten wir das

Ergebnis:

$$f_I(E'') = \frac{1}{\sqrt{gh}} \left\{ \frac{R^2}{2} \arcsin\left(\frac{y_{C'}|x_{A'}| - y_{A'}R_3}{R^2} \right) + \frac{|x_{A'}|\, y_{A'}}{2} - \frac{R_3 y_{C'}}{2} - \frac{y_B + y_{A'}}{2}(|x_{A'}| - R_3) \right\} . \qquad (3.71)$$

Wir wenden die Näherung

$$\arcsin\left(\frac{y_{C'}|x_{A'}| - y_{A'}R_3}{R^2} \right) \approx \frac{y_{C'}|x_{A'}| - y_{A'}R_3}{R^2}$$

an, damit folgt aus (3.71)

$$f_I(E'') \approx \frac{(y_{C'} - y_B)(|x_{A'}| - R_3)}{2\sqrt{gh}} \qquad (3.72)$$

Mit Gln. (3.69) und (3.70) ergibt sich die Gl. (3.72) zu

$$f_I(E'') = \frac{1}{2\sqrt{gh}} \left(\sqrt{E_3'' - E''} - \sqrt{E_3'' - E_4''} \right) \left(\frac{2\sqrt{gh}}{g+h} \sqrt{E_1'' - E''} - \frac{h-g}{g+h} \sqrt{E_{B0} - E_1''} - \sqrt{E_{B0} - E_3''} \right) . \qquad (3.73)$$

Unter Beachtung von folgender Relation

$$\frac{h-g}{g+h} \sqrt{E_{B0} - E_1''} + \sqrt{E_{B0} - E_3''} = \frac{2\sqrt{gh}}{g+h} \sqrt{E_1'' - E_4''}$$

ergibt

$$f_I(E'') = \frac{1}{g+h} \left(\sqrt{E_3'' - E''} - \sqrt{E_3'' - E_4''} \right) \left(\sqrt{E_1'' - E''} - \sqrt{E_1'' - E_4''} \right) , \qquad (3.74)$$

wobei $f_I(E'' = E_4'') = 0$ ist.

III. 3.3 Berechnung von f(E") für $E'' \leq E_2''$

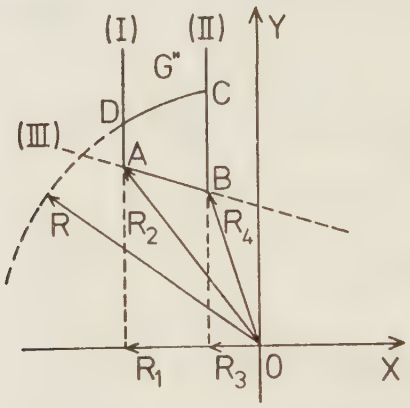


Fig.(3.12): Die Fläche des Teils des Kreises $x^2 + y^2 = E_{Bo} - E'' = R^2$ im Gebiet G" für $R_2 \leq R$.

Wir nennen die Fläche f(E") für $E'' \leq E_2''$ (oder $R_2 \leq R$) $f_{II}(E'')$

$$f_{II}(E'') = \frac{1}{\sqrt{g\,h}} \text{ Fläche ABCD}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{g\,h}} \int_{x=x_D}^{x_C} dx \int_{y=-\frac{h-g}{2\sqrt{gh}}x + \frac{g+h}{2\sqrt{gh}}R_1}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy$$

$$f_{II}(E'') = \frac{1}{\sqrt{g\,h}} \left\{ \frac{R^2}{2} \arcsin\left(\frac{R_1\sqrt{R^2-R_3^2}}{R^2} - \frac{R_3\sqrt{R^2-R_1^2}}{R^2} \right) + \frac{R_1\sqrt{R^2-R_1^2}}{2} - \frac{R_3\sqrt{R^2-R_3^2}}{2} \right.$$

$$\left. + \frac{h-g}{4\sqrt{gh}}(R_3^2-R_1^2) - \frac{g+h}{2\sqrt{gh}} R_1 (R_1 - R_3) \right\} \qquad (3.75)$$

Wir wenden die Näherung

$$\arcsin\left(\frac{R_1\sqrt{R^2-R_3^2}}{R^2} - \frac{R_3\sqrt{R^2-R_1^2}}{R^2} \right) \approx \frac{R_1\sqrt{R^2-R_3^2}}{R^2} - \frac{R_3\sqrt{R^2-R_1^2}}{R^2}$$

an, damit folgt aus (3.75)

$$f_{II}(E'') \approx \frac{R_1 - R_3}{2\sqrt{gh}} \left\{ \sqrt{R^2 - R_3^2} + \sqrt{R^2 - R_1^2} - \frac{h-g}{2\sqrt{gh}}(R_1 + R_3) - \frac{g+h}{\sqrt{gh}} R_1 \right\}. \quad (3.76)$$

Ausgedrückt durch E'', E_1'' und E_3'' (3.69) hat $f_{II}(E'')$ die Form

$$f_{II}(E'') = \frac{\sqrt{E_{Bo} - E_1''} - \sqrt{E_{Bo} - E_3''}}{2\sqrt{gh}} \left\{ \sqrt{E_3'' - E''} + \sqrt{E_1'' - E''} - \frac{h-g}{2\sqrt{gh}} \left(\sqrt{E_{Bo} - E_3''} + \sqrt{E_{Bo} - E_1''} \right) - \frac{g+h}{\sqrt{gh}} \sqrt{E_{Bo} - E_1''} \right\}. \quad (3.77)$$

Es ist leicht zu zeigen

$$- \frac{h-g}{2\sqrt{gh}} \left(\sqrt{E_{Bo} - E_3''} + \sqrt{E_{Bo} - E_1''} \right) - \frac{g+h}{\sqrt{gh}} \sqrt{E_{Bo} - E_1''} = - \sqrt{E_1'' - E_2''} - \sqrt{E_3'' - E_4''},$$

damit folgt aus (3.77)

$$f_{II}(E'') = \frac{J}{\sqrt{g+h}} \left(\sqrt{E_3'' - E''} + \sqrt{E_1'' - E''} - \sqrt{E_1'' - E_2''} - \sqrt{E_3'' - E_4''} \right). \quad (3.78)$$

III. 3.4 Die Näherungsauswertung von $B_{II}(E_b, I_b)$

Aus der Gl. (3.59) und (3.62) ist

$$B_{II}(E_b, I_b) = \frac{\pi}{G} \sum_{J=0}^{\infty} T_{l_1 = J}^{J} F_{II}^{J}(E_b, I_b) \quad (3.79)$$

mit

$$F_{II}^{J}(E_b, I_b) = K \int_{E''=0}^{\infty} dE'' \; e^{b\sqrt{E''}} f(E''). \quad (3.80)$$

Zur Berechnung von $B_{II}(E_b, I_b)$ machen wir die ähnlichen Näherungen wie in Abschnitt III.2.6, nämlich:

1) Black box-Näherung für T_J^J, 2) die Summation über J wird durch Integration ersetzt, 3) f(E") wird durch $f_I(E")$ ersetzt.

Weiterhin machen wir folgende Abschätzungen:

$$\sqrt{E_3" - E"} = \sqrt{E_3" - E_4" + E_4" - E"} \leq \sqrt{E_3" - E_4"} + \sqrt{E_4" - E"} \,,$$
$$\sqrt{E_1" - E"} \leq \sqrt{E_1" - E_4"} + \sqrt{E_4" - E"} \,. \tag{3.81}$$

$$f_I(E") = \frac{1}{g+h}\left(\sqrt{E_3" - E"} - \sqrt{E_3" - E_4"}\right)\left(\sqrt{E_1" - E"} - \sqrt{E_1" - E_4"}\right)$$
$$\leq \frac{1}{g+h}\left(\sqrt{E_3" - E_4"} + \sqrt{E_4" - E"} - \sqrt{E_3" - E_4"}\right)\left(\sqrt{E_1" - E_4"} + \sqrt{E_4" - E"} - \sqrt{E_1" - E_4"}\right)$$

$$f_I(E") \leq \frac{1}{g+h}\,(E_4" - E") \,. \tag{3.82}$$

Wir setzen (3.82) in (3.80) ein, damit ergibt:

$$F_{II}^J(E_b, I_b) = K \int_{E"=0}^{E_4"} dE"\, e^{b\sqrt{E"}}\, f_I(E") \leq \frac{K}{g+h} \int_{E"=0}^{E_4"} dE"\, e^{b\sqrt{E"}}\,(E_4" - E") \tag{3.83}$$

Die Integration kann einfach berechnet werden, das Ergebnis lautet:

$$\int_{E"=0}^{E_4"} dE"\, e^{b\sqrt{E"}}(E_4" - E") = \frac{2}{b^4}\left\{(x^2-6) + 2e^x(x^2-3x+3)\right\}\Big|_{x=b\sqrt{E_4"}} \,,$$

so erhalten wir

$$F_{II}^J(E_b, I_b) \leq \frac{2K}{b^4(g+h)}\left\{(x^2-6) + 2e^x(x^2-3x+3)\right\}\Big|_{x=b\sqrt{E_4"}} \,, \tag{3.84}$$

mit

$$b = 2\sqrt{\frac{A_B}{10}}$$
$$E_4" = E_{B0} - h(I_b+1)^2 - g\,J^2 \,.$$

Mit der Abkürzung

$$H(x(J)) := x^2 - 6 + 2e^x (x^2 - 3x + 3) \tag{3.85}$$

lassen sich die Gln. (3.79) und (3.84) zusammenfassen zu

$$B_{II}(E_b, I_b) \leq \frac{\pi}{G} \frac{2K}{b^4(g+h)} \int_{J=0}^{J_{max}} dJ \, H(x(J)) \Big|_{x = b\sqrt{E_4''}} =: B(E_b, I_b)_{II\ \text{Abschätzung}} \tag{3.86}$$

Analog zu (3.49) wenden wir die Sattelpunktmethode auf H(x(J)) an, das Ergebnis lautet:

$$H(x(J)) \approx H(\tilde{x}) \exp -\left\{ b^2 g \frac{1 + e^{\tilde{x}}(\tilde{x} - 1)}{H(\tilde{x})} J^2 \right\} \Bigg|_{\tilde{x} = b\sqrt{E_{Bo} - h(I_b+1)^2}} \tag{3.87}$$

mit $H(\tilde{x}) = \tilde{x}^2 - 6 + 2e^{\tilde{x}} (\tilde{x}^2 - 3\tilde{x} + 3)$.

Für die gewählten Reaktionen (3.52) ist $e^{\tilde{x}}$ der führende Term in der Gl. (3.87). Man kann weiterhin folgende Näherung machen:

$$\begin{aligned} H(\tilde{x}) &\approx 2e^{\tilde{x}} (\tilde{x}^2 - 3\tilde{x}) \\ 1 + e^{\tilde{x}} (\tilde{x} - 1) &\approx e^{\tilde{x}} \tilde{x} \end{aligned} \tag{3.88}$$

Setzt man (3.88) und (3.87) in (3.86) ein, so erhält man:

$$B_{II\ Abs.}(E_b, I_b) = \frac{\pi K}{G} e^{b\sqrt{E_{Bo} - h(I_b+1)^2}} \cdot \frac{4}{b^4(g+h)} \left\{ b^2 (E_{Bo} - h(I_b+1)^2) - 3b\sqrt{E_{Bo} - h(I_b+1)^2} \right\} \int_{J=0}^{J_{max}} \exp - \frac{b^2 g J^2}{2(b\sqrt{E_{Bo} - h(I_b+1)^2} - 3)} dJ$$

Mit den Abkürzungen

$$\eta := \frac{4}{b^4(g+h)} \left\{ b^2 (E_{Bo} - h(I_b+1)^2) - 3b\sqrt{E_{Bo} - h(I_b+1)^2} \right\}$$

$$\xi := \frac{b^2 g}{2(b\sqrt{E_{Bo} - h(I_b+1)^2} - 3)} \tag{3.89}$$

damit folgt

$$B_{II\ Abs.}(E_b, I_b) = \frac{\pi K}{G} \eta \, e^{b\sqrt{E_{Bo} - h(I_b+1)^2}} \int_{J=0}^{\min(J_{max}, J_{ex.})} dJ \, e^{-\xi J^2} . \tag{3.90}$$

In (3.90) ist dabei berücksichtigt, daß F_{II}^{J} identisch Null wird, wenn $E_4'' \leq 0$ ist, vgl. (3.83). Mit

$$E_4'' = E_{Bo} - h(I_b + 1)^2 - gJ^2$$

folgt, daß F_{II}^{J} Null ist für

$$J \geq J_{extreme},$$

mit

$$J_{ex} := \left[\frac{1}{g} \left\{ E_{Bo} - h(I_b + 1)^2 \right\} \right]^{\frac{1}{2}}. \tag{3.91}$$

Die Integration in der Gl. (3.90) kann einfach berechnet werden.

$$\int_{J=0}^{\min(J_{ex}, J_{max})} dJ\, e^{-\xi J^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\xi}}\, erf\left(\sqrt{\xi}\, \min(J_{ex}, J_{max})\right).$$

Man setzt das Ergebnis in (3.90) ein und gewinnt schließlich

$$B_{II\,Abs}(E_b, I_b) = \frac{\pi K}{G} \frac{\eta}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\xi}}\, e^{b\sqrt{E_{Bo} - h(I_b+1)^2}}\, erf\left(\sqrt{\xi}\, \min(J_{ex}, J_{max})\right). \tag{3.92}$$

Aus (3.86) ist $B_{II}(E_b, I_b) \leq B_{II\,Abs}(E_b, I_b)$.

IV. Fehlerdiskussion

IV. 1. Vorbemerkung

Im Abschnitt III wurde eine analytisch einfache Näherungsformel für den Wirkungsquerschnitt $\frac{d\sigma}{dE_b}$ abgeleitet, Formel (3.58). Wir müssen eine genauere Abschätzung der Fehler geben, die bei der Approximation der Thomas-Formel durch diesen Näherungsausdruck entstehen.

Im folgenden sei mit Δ_2 der prozentuale Fehler bezeichnet, der aufgrund der Vernachlässigung des Terms $B_{II}(E_b,I_b)$ gegenüber $B_I(E_b,I_b)$ in Formel (3.23) folgt. Mit Δ_1 bezeichnen wir den Fehler, der sich dadurch ergibt, daß bei der Berechnung von B_I nach Formel (3.39) die Funktion $f(E')$ durch $f_{app}(E')$ im Gebiet $E_2 \leq E' \leq E_1$ ersetzt wird. Schließlich ist Δ_3 der Fehler bei der entsprechenden Approximation für $0 \leq E' \leq E_3$. Die genaue Definition von Δ_i $(i = 1,2,3)$ wird in den einzelnen Abschnitten gegeben. Wir haben insgesamt

$$\frac{(\frac{d\sigma}{dE_b})_{exakt} - (\frac{d\sigma}{dE_b})_{app.}}{(\frac{d\sigma}{dE_b})_{app.}} = \Delta_1 - \Delta_2 - \Delta_3. \tag{4.1}$$

Wir geben im folgenden obere Schranken für die drei Fehler an:

$$|\Delta_i| \leq \tilde{\Delta}_i \qquad i = 1,2,3 \tag{4.2}$$

sowie für mehrere Beispiele graphische Darstellungen dieser Fehlerschranken.

Man beachte, daß im folgenden alle Definitionen so getroffen sind, daß die Δ_i $(i = 1,2,3)$ positiv sind. Nach Formel (4.1) kompensieren sich die Fehler also teilweise. Diese Tatsache wird in der Diskussion nicht weiter verwertet.

IV. 2. Fehler Δ_1

Im Abschnitt (III.2.6) haben wir bereit $f_{app}(E')$ eingeführt

$$f_{app}(E') = \begin{cases} f_{II}(E') & \text{für } 0 < E' \leq \hat{E}_1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{4.3}$$

und f(E') hat folgende Formen

$$f(E') = \begin{cases} f_I(E') & \text{für } E_2 \le E' \le E_1 \\ f_{II}(E') & E_3 \le E' \le E_2 \\ f_{III}(E') & E' \le E_3, \end{cases} \tag{4.4}$$

wobei die expliziten Formeln in (3.43) aufgeschrieben sind und die Energien $E_i (i = 1,2,3)$, $\hat{E}_1$ in (3.33) bzw. (3.44).

Im Fall $E_3 < 0$ folgt aus (4.4)

$$f(E') = \begin{cases} f_{II}(E') & \text{für } 0 < E' \le E_2 \\ f_I(E') & E_2 < E' \le E_1 \end{cases} . \tag{4.5}$$

Das Ersetzen der Funktion f(E') durch $f_{app}(E')$ bedingt bei der Berechnung von $B_I(E_b, I_b)$ eine Vernachlässigung des Terms. $(F_I^J - F_{Iapp}^J)$, siehe (4.7). Der Vernachlässigungsterm entspricht die schraffierte Fläche in Fig. (4.1).

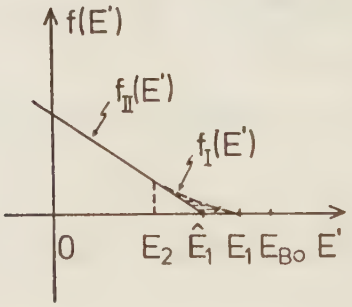


Fig. (4.1): Im Fall $E_3 < 0$.

Wir definieren

$$\Delta F_I^J := F_I^J - F_{Iapp}^J . \tag{4.6}$$

Mit Gln. (3.25) und (3.46) ergibt

$$\Delta F_I^J = K \int_{E'=0}^{E_1} dE'\, e^{b\sqrt{E'}} f(E') - K \int_{E'=0}^{\hat{E}_1} dE'\, e^{b\sqrt{E'}} f_{II}(E')$$

$$= K \left\{ \int_{E'=0}^{E_2} dE'\, e^{b\sqrt{E'}} f_{II}(E') + \int_{E'=E_2}^{E_1} dE'\, e^{b\sqrt{E'}} f_I(E') - \int_{E'=0}^{E_2} dE'\, e^{b\sqrt{E'}} f_{II}(E') - \int_{E'=E_2}^{\hat{E}_1} dE'\, e^{b\sqrt{E'}} f_{II}(E') \right\}$$

$$= K \left\{ \int_{E'=E_2}^{E_1} dE'\, e^{b\sqrt{E'}} f_I(E') - \int_{E'=E_2}^{\hat{E}_1} dE'\, e^{b\sqrt{E'}} f_{II}(E') \right\}$$

$$\Delta F_I^J = K \int_{E'=E_2}^{\hat{E}_1} dE'\, e^{b\sqrt{E'}} \left(f_I(E') - f_{II}(E') \right) + K \int_{E'=\hat{E}_1}^{E_1} dE' e^{b\sqrt{E'}} f_I(E') . \qquad (4.7)$$

Wir machen folgende Abschätzung:

für $\hat{E}_1 \le E' \le E_1$ ist $f_I(E') \le f_I(\hat{E}_1)$

für $E_2 \le E' \le \hat{E}_1$ ist $f_I(E') - f_{II}(E') \le f_I(\hat{E}_1)$,

setzt man in (4.7) ein, erhält man

$$\Delta F_I^J \le K f_I(\hat{E}_1) \int_{E'=E_2}^{E_1} dE'\, e^{b\sqrt{E'}} . \qquad (4.8)$$

Nach Gl. (3.43) und unter Beachtung von Gl. (3.33) und (3.44) haben wir

$$f_I(\hat{E}_1) = \frac{2}{3} \frac{\sqrt{gh}}{g+h} (I_b - J)^2 \left(\frac{\sqrt{\frac{h}{g}}}{\arcsin \sqrt{\frac{h}{g+h}}} - 1 \right)^{3/2} .$$

Die Integration in der Gl. (4.8) ist

$$\int_{E'=E_2}^{E_1} dE'\, e^{b\sqrt{E'}} = \frac{2}{b^2} e^x (x-1) \Big|_{x=b\sqrt{E_2}}^{x=b\sqrt{E_1}} .$$

Damit folgt aus (4.8)

$$\Delta F_I^J \le K \frac{4}{3b^2} \frac{\sqrt{gh}}{g+h} \left(\frac{\sqrt{\frac{h}{g}}}{\arcsin \sqrt{\frac{h}{g+h}}} - 1 \right)^{\frac{3}{2}} (I_b - J)^2 \left\{ e^{b\sqrt{E_1}} (b\sqrt{E_1} - 1) - e^{b\sqrt{E_2}} (b\sqrt{E_2} - 1) \right\} . \qquad (4.9)$$

Da $E_1 > E_2$ gilt, ist $(e^{b\sqrt{E_2}} - e^{b\sqrt{E_1}}) < 0$.

Man kann die Gl. (4.9) folgendermaßen

$$\Delta F_I^J \leq K \frac{4}{3b} \frac{\sqrt{gh}}{g+h} \left(\frac{\sqrt{\frac{h}{g}}}{\arcsin\sqrt{\frac{h}{g+h}}} - 1 \right)^{\frac{3}{2}} (I_b - J)^2 (\sqrt{E_1}\, e^{b\sqrt{E_1}} - \sqrt{E_2}\, e^{b\sqrt{E_2}})$$

abschätzen.

Mit der Abkürzung

$$\tilde{\gamma} := \frac{4}{3b} \frac{\sqrt{gh}}{g+h} \left(\frac{\sqrt{\frac{h}{g}}}{\arcsin\sqrt{\frac{h}{g+h}}} - 1 \right)^{3/2}, \tag{4.10}$$

damit folgt

$$\Delta F_I^J \leq K \tilde{\gamma} (I_b - J)^2 (\sqrt{E_1}\, e^{b\sqrt{E_1}} - \sqrt{E_2}\, e^{b\sqrt{E_2}}). \tag{4.11}$$

Sei $B_{I_{exakt}}(E_b, I_b) = B_{I_{app}}(E_b, I_b) + \Delta B_I(E_b, I_b)$,

mit (3.45) folgt

$$B_{I_{exakt}}(E_b, I_b) = \frac{\pi}{G} \left(\int_{J=0}^{J_{max}} dJ\, F_{I_{app.}}^J + \int_{J=0}^{J_{max}} dJ\, \Delta F_I^J \right). \tag{4.12}$$

Sei Δ_1 der Fehler bei der Berechnung von B_I, der aufgrund der Vernachlässigung von ΔF_I^J entsteht, also Δ_1 definiert durch:

$$\Delta_1 := \frac{\Delta B_I(E_b, I_b)}{B_{I_{app.}}(E_b, I_b)} = \frac{\int_{J=0}^{J_{max}} dJ\, \Delta F_I^J}{\int_{J=0}^{J_{max}} dJ\, F_{I_{app.}}^J}. \tag{4.13}$$

Zur Berechnung von $\int_{J=0}^{J_{max}} dJ\, \Delta F_I^J$ machen wir zunächst eine Abschätzung des Terms $(\sqrt{E_1}\, e^{b\sqrt{E_1}} - \sqrt{E_2}\, e^{b\sqrt{E_2}})$, wir werden diese Abschätzung in späteren Kapiteln nochmals benutzen.

Die Abschätzung von $\sqrt{E_1}$ bzw. $\sqrt{E_2}$ wurde im Anhang III durchgeführt, die

Ergebnisse sind:

$$\sqrt{E_{Bo}} - \frac{h(I_b-J)^2}{\sqrt{E_{Bo}}} \leq \sqrt{E_2}$$

$$\sqrt{E_1} \leq \sqrt{E_{Bo}} - \frac{g\,h}{2\sqrt{E_{Bo}}(g+h)}(I_b-J)^2. \qquad (4.14)$$

Damit gelten folgende Ungleichungen:

$$\left\{\sqrt{E_{Bo}} - \frac{h}{\sqrt{E_{Bo}}}(I_b-J)^2\right\} e^{b\left\{\sqrt{E_{Bo}} - \frac{h}{\sqrt{E_{Bo}}}(I_b-J)^2\right\}} \leq \sqrt{E_2}\, e^{b\sqrt{E_2}}$$

$$\sqrt{E_1}\, e^{b\sqrt{E_1}} \leq \left\{\sqrt{E_{Bo}} - \frac{gh}{2\sqrt{E_{Bo}}(g+h)}(I_b-J)^2\right\} e^{b\left\{\sqrt{E_{Bo}} - \frac{gh}{2\sqrt{E_{Bo}}(g+h)}(I_b-J)^2\right\}}$$

Damit folgt

$$\sqrt{E_1}\, e^{b\sqrt{E_1}} - \sqrt{E_2}\, e^{b\sqrt{E_2}} \leq \left\{\sqrt{E_{Bo}} - \frac{gh}{2\sqrt{E_{Bo}}(g+h)}(I_b-J)^2\right\} e^{b\left\{\sqrt{E_{Bo}} - \frac{gh}{2\sqrt{E_{Bo}}(g+h)}(I_b-J)^2\right\}}$$
$$- \left\{\sqrt{E_{Bo}} - \frac{h}{\sqrt{E_{Bo}}}(I_b-J)^2\right\} e^{b\left\{\sqrt{E_{Bo}} - \frac{h}{\sqrt{E_{Bo}}}(I_b-J)^2\right\}}$$

(4.15)

Unter Verwendung der beiden Abschätzungen (4.11) und (4.15) führt das Integral von $\Delta B_I(E_b, I_b)$ zu folgender Gestalt:

$$\int_{J=0}^{J_{max}} dJ\, \Delta F_I^J \leq K\tilde{\gamma} \int_{J=0}^{J_{max}} dJ\,(I_b-J)^2 \left[\left\{\sqrt{E_{Bo}} - \frac{gh}{2\sqrt{E_{Bo}}(g+h)}(I_b-J)^2\right\} e^{b\left\{\sqrt{E_{Bo}} - \frac{gh}{2\sqrt{E_{Bo}}(g+h)}(I_b-J)^2\right\}}\right.$$
$$\left. - \left\{\sqrt{E_{Bo}} - \frac{h}{\sqrt{E_{Bo}}}(I_b-J)^2\right\} e^{b\left\{\sqrt{E_{Bo}} - \frac{h}{\sqrt{E_{Bo}}}(I_b-J)^2\right\}}\right].$$

(4.16)

Mit den Abkürzungen

$$\tilde{d} := \sqrt{E_{Bo}}$$

$$\tilde{c} := \frac{g\,h}{2\sqrt{E_{Bo}}(g+h)} \quad ; \quad s := b\tilde{c} \qquad (4.17)$$

$$\tilde{\ell} := \frac{h}{\sqrt{E_{Bo}}} \quad ; \quad t := b\tilde{\ell}$$

und der Substitution $x = I_b - J$ ergibt

$$\int_{J=0}^{J_{max}} dJ\, \Delta F_I^J \le K \tilde{\gamma}\, e^{b\sqrt{E_{Bo}}} \Bigg\{ \tilde{d} \int_{x=I_b-J_{max}}^{I_b} dx\, x^2\, e^{-sx^2} - \tilde{c} \int_{x=I_b-J_{max}}^{I_b} dx\, x^4\, e^{-sx^2} - \tilde{d} \int_{x=I_b-J_{max}}^{I_b} dx\, x^2\, e^{-tx^2} + \tilde{l} \int_{x=I_b-J_{max}}^{I_b} dx\, x^4\, e^{-tx^2} \Bigg\} \tag{4.18}$$

Die Integrationen in (4.18) können unter Verwendung folgender Formel [18]

$$\int_0^{\chi^2} dt\, (t)^{\frac{\nu}{2}-1}\, e^{-\frac{t}{2}} = \left[2^{\frac{\nu}{2}}\, \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \right] P(\chi^2 | \nu) \tag{4.19}$$

ausgewertet werden. $P(\chi^2/\nu)$ ist "Chi-Square Probability Function".

Die ausführliche Auswertung des Integrals wird im Anhang IV durchgeführt.

Damit liefert das Ergebnis:

$$\int_{J=0}^{J_{max}} dJ\, \Delta F_I^J \le K \tilde{\gamma}\, e^{b\sqrt{E_{Bo}}} \left[\frac{\tilde{d}\sqrt{\pi}}{4} \left\{ \frac{1}{s^{3/2}} \left(P(2s I_b^2 | 3) + P(2s(J_{max} - I_b)^2 | 3) \right) - \frac{1}{t^{3/2}} \left(P(2t I_b^2 | 3) + P(2t(J_{max} - I_b)^2 | 3) \right) \right\} - \frac{3\sqrt{\pi}}{8 s^{5/2}} \tilde{c} \left\{ P(2s I_b^2 | 5) + P(2s(J_{max} - I_b)^2 | 5) \right\} + \frac{3\sqrt{\pi}}{8 t^{5/2}} \tilde{l} \left\{ P(2t I_b^2 | 5) + P(2t(J_{max} - I_b)^2 | 5) \right\} \right]. \tag{4.20}$$

Insgesamt folgt somit nach (4.13),(4.20) und (3.57) das Resultat:

$$\Delta_1 = \frac{\int_{J=0}^{J_{max}} dJ\, \Delta F_I^J}{\int_{J=0}^{J_{max}} dJ\, F_{I\,app.}^J} \le \frac{\tilde{\gamma}\sqrt{\bar{\beta}}}{2\bar{\alpha}} \left[\frac{\bar{d}}{s^{3/2}} \left\{ P(2s I_b^2 | 3) + P(2s(J_{max} - I_b)^2 | 3) \right\} - \frac{\bar{d}}{t^{3/2}} \left\{ P(2t I_b^2 | 3) + P(2t(J_{max} - I_b)^2 | 3) \right\} - \frac{3\bar{c}}{2s^{5/2}} \left\{ P(2s I_b^2 | 5) + P(2s(J_{max} - I_b)^2 | 5) \right\} + \frac{3\bar{l}}{2t^{5/2}} \left\{ P(2t I_b^2 | 5) + P(2t(J_{max} - I_b)^2 | 5) \right\} \right] \Big/ \left\{ \operatorname{erf}(\sqrt{\bar{\beta}}\, I_b) + \operatorname{erf}\sqrt{\bar{\beta}}\,(J_{max} - I_b) \right\}$$

$$=: \bar{\Delta}_1 \tag{4.21a}$$

$$\Delta_1 \le \bar{\Delta}_1 \tag{4.21b}$$

Die Werte von $P(\chi^2/\nu)$ können durch folgende Reihenentwicklung [18]

$$P(\chi^2|\nu) = \frac{2(\frac{\chi^2}{2})^{\frac{\nu}{2}} e^{-\frac{\chi^2}{2}}}{\nu\,\Gamma(\frac{\nu}{2})} \left\{ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\chi^2)^k}{(\nu+2)(\nu+4)\cdots\cdots(\nu+2k)} \right\} \qquad (4.22)$$

berechnet werden.

Die Dimension der Parameter von den Gleichungen (4.10), (417) und (3.54) sind:

$[g] = [h] = [\tilde{\alpha}] = \text{MeV}$; $[\tilde{\gamma}] = [\tilde{c}] = [\tilde{d}] = [\tilde{\ell}] = \text{MeV}^{1/2}$; $[b] = \text{MeV}^{-1/2}$

$\tilde{\beta}$, s , t sind dimensionlos.

IV. 3. Diskussion der Fehlerschranke $\tilde{\Delta}_1$

Wir hatten im letzten Abschnitt abschätzungsweise die obere Schranke ($\tilde{\Delta}_1$) des Fehlers Δ_1 berechnet (4.21a), nun wollen wir $\tilde{\Delta}_1$ in Abhängigkeit vom Spin des emittierten Kerns I_b bzw. maximaler Anregungsenergie E_{Bo} des Kerns B erörtern. Hierbei muß betont werden, daß es nicht gelungen ist, einen explizit-analytischen Ausdruck der Abhängigkeit $\tilde{\Delta}_1$ von I_b bzw. E_{Bo} herzuleiten. Um $\tilde{\Delta}_1$ als Funktion von I_b bzw. E_{Bo} noch studieren zu können, müssen wir auf numerische Rechnungen eingehen. Als Beispiel werden wir die bereits in Abschnitt (III.2.6) erwähnten vier Reaktionen nehmen, nämlich:

$$^{39}_{K} \longrightarrow {}^{12}_{C} + {}^{27}_{Al}$$

$$^{117}_{Te} \longrightarrow {}^{40}_{Ar} + {}^{77}_{Se}$$

$$^{205}_{At} \longrightarrow {}^{40}_{Ar} + {}^{165}_{Ho}$$

$$^{209}_{At} \longrightarrow {}^{12}_{C} + {}^{197}_{Au}$$

Bevor die numerischen Rechnungsergebnisse selbst diskutiert werden, soll $\tilde{\Delta}_1$ in Abhängigkeit von I_b ganz kurz besprochen werden. Wir untersuchen die maximale Stelle von $\tilde{\Delta}_1$ als Funktion von I_b

$$\frac{\partial \tilde{\Delta}_1}{\partial I_b} = \frac{\tilde{\gamma}\sqrt{\tilde{\beta}}}{2\tilde{\alpha}} \frac{\frac{\partial}{\partial I_b}[\cdots\cdots]\cdot\{\operatorname{erf}\sqrt{\tilde{\beta}}(J_{max}-I_b)+\operatorname{erf}(\sqrt{\tilde{\beta}}I_b)\} - \frac{\partial}{\partial I_b}\{\operatorname{erf}\sqrt{\tilde{\beta}}(J_{max}-I_b)+\operatorname{erf}(\sqrt{\tilde{\beta}}I_b)\}\cdot[\cdots\cdots]}{\{\operatorname{erf}\sqrt{\tilde{\beta}}(J_{max}-I_b)+\operatorname{erf}(\sqrt{\tilde{\beta}}I_b)\}^2} \stackrel{!}{=} 0$$

(4.23)

Der Ausdruck in der Klammer ist genau wie in (4.21a). Die ausführlichen Berechnungen werden in Anhang V durchgeführt und liefern das Ergebnis:

$$\frac{\tilde{\gamma}\sqrt{\tilde{\beta}}}{2\tilde{\alpha}\left\{\operatorname{erf}\sqrt{\tilde{\beta}}(J_{max}-I_b)+\operatorname{erf}(\sqrt{\tilde{\beta}}\,I_b)\right\}^2}\cdot\Bigg[\left\{\frac{4\tilde{d}}{\sqrt{\pi}}e^{-sI_b^2}\left(I_b^2-(J_{max}-I_b)^2e^{-sJ_{max}(J_{max}-2I_b)}\right)-\frac{4\tilde{d}}{\sqrt{\pi}}e^{-tI_b^2}\left(I_b^2-(J_{max}-I_b)^2e^{-tJ_{max}(J_{max}-2I_b)}\right)\right.$$

$$\left.-\frac{4\tilde{c}}{\sqrt{\pi}}e^{-sI_b^2}\left(I_b^4-(J_{max}-I_b)^4e^{-sJ_{max}(J_{max}-2I_b)}\right)+\frac{4\tilde{\ell}}{\sqrt{\pi}}e^{-tI_b^2}\left(I_b^4-(J_{max}-I_b)^4e^{-tJ_{max}(J_{max}-2I_b)}\right)\right\}\cdot\underbrace{\left\{\operatorname{erf}\sqrt{\tilde{\beta}}(J_{max}-I_b)+\operatorname{erf}(\sqrt{\tilde{\beta}}\,I_b)\right\}}_{\neq 0}$$

$$\left.-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\tilde{\beta}}\,e^{-\tilde{\beta}I_b}\left\{1-e^{-\tilde{\beta}J_{max}(J_{max}-2I_b)}\right\}\cdot\underbrace{[\ldots\ldots\ldots]}_{\neq 0}\right]\quad=0$$

(4.24)

Für $I_b = \frac{J_{max}}{2}$

$$e^{-sJ_{max}(J_{max}-2I_b)} = e^{-tJ_{max}(J_{max}-2I_b)} = e^{-\tilde{\beta}J_{max}(J_{max}-2I_b)} = e^{-0} = 1$$

$$I_b^2-(J_{max}-I_b)^2e^{-sJ_{max}(J_{max}-2I_b)} = \frac{J_{max}^2}{4}-\frac{J_{max}^2}{4} = 0$$

$$\left.\frac{\partial\,\tilde{\Delta}_1}{\partial\,I_b}\right|_{I_b=\frac{J_{max}}{2}} = 0\,, \qquad (4.25)$$

d.h. $\tilde{\Delta}_1$ ist maximal bei $I_b = \frac{J_{max}}{2}$

Mit der Formel (4.21a) wollen wir uns hier auf die numerischen Rechnungsergebnisse der bereits erwähnten vier Reaktionen beschränken.

a) Reaktion $^{39}K \rightarrow {}^{12}C + {}^{27}Al$ mit $J_{max} = 41\ \hbar$, $g = 0{,}062$ MeV, $h = 0{,}1482$ MeV, $b = 3{,}286\ \text{MeV}^{-1/2}$ (siehe Gl. (3.14)). Unter Beachtung von Gln. (3.54),(4.10) und (4.17) können die Parameter $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$, $\tilde{\gamma}$, $\tilde{c}$, $\tilde{d}$, $\tilde{\ell}$, s , t berechnet werden.

Der Verlauf der prozentualen Fehlerschranke $\tilde{\Delta}_1$ als Funktion von I_b für E_{Bo} = 50,75 und 100 MeV ist in Fig. (4.2) dargestellt. Die Kurven haben das Maximum an der Stelle $I_b = 20{,}5\ \hbar = \frac{J_{max}}{2}$, vgl. (4.25). Die maximale Fehlerschranke bei $I_b = \frac{J_{max}}{2}$ für E_{Bo} = 50,75 und 100 MeV ist 17,8 %, 16,7 % und 15,8 %.

Fig. (4.3) zeigt die Abhängigkeit $\tilde{\Delta}_1$ von E_{Bo} für I_b = 15, 20, 25, 30, 35 $\hbar$. Der Fehler nimmt mit zunehmender Energie E_{Bo} ab, der Abfall im Bereich $E_{Bo} \leq 62{,}5$ MeV ist stärker als im Bereich $E_{Bo} > 62{,}5$ MeV. Für I_b = 35 $\hbar$ und $E_{Bo} \geq 62{,}5$ MeV bleibt $\tilde{\Delta}_1$ fast konstant.

b) Für die Reaktion $^{117}Te \rightarrow {}^{40}Ar + {}^{77}Se$ mit J_{max} = 91 $\hbar$, g = 0,0093 MeV, h = 0,0259 MeV, b = 5,5498 $MeV^{-1/2}$ wurde die prozentuale Fehlerschranke $\tilde{\Delta}_1$ in Abhängigkeit von I_b bzw. E_{Bo} in Fig. (4.4) bzw. Fig. (4.5) gezeigt.

Fig. (4.4) illustriert $\tilde{\Delta}_1$ als Funktion von I_b für E_{Bo} = 25, 50, 75 und 100 MeV. Die maximale Fehlerschranke bei $I_b = \frac{J_{max}}{2}$ und E_{Bo} = 25, 50, 75, 100 MeV ist 21,3 %, 20,2 %, 19,8 %, 19,1 %.

Fig. (4.5) zeigt den Verlauf der prozentualen Fehlerschranken $\tilde{\Delta}_1$ in Abhängigkeit von E_{Bo}, für I_b = 20, 30, 40, 45, 50, 60, 70, 80 $\hbar$. Die Fehlerschranke nimmt mit zunehmender Energie E_{Bo} ab. Für I_b = 80 $\hbar$ ist $\tilde{\Delta}_1$ fast unabhängig von E_{Bo}.

c) Für die Reaktion $^{205}At \rightarrow {}^{40}Ar + {}^{165}Ho$ mit J_{max} = 105 $\hbar$, g = 0,0056 MeV, h = 0,007 MeV, b = 8,124 $MeV^{-1/2}$ wurde die prozentuale Fehlerschranke $\tilde{\Delta}_1$ in Abhängigkeit von I_b bzw. E_{Bo} in Fig. (4.6) bzw. Fig. (4.7) illustriert.

In Fig. (4.6) ist der Verlauf von $\tilde{\Delta}_1$ in Abhängigkeit von I_b für E_{Bo} = 25, 50, 75 und 100 MeV dargestellt. Die maximale Fehlerschranke für $I_b = \frac{J_{max}}{2}$ und E_{Bo} = 25, 50, 75, 100 MeV ist 8,3 %, 8 %, 7,6 %, 7,4 %.

In Fig. (4.7) ist der Verlauf der prozentualen Fehlerschranke $\tilde{\Delta}_1$ als Funktion von E_{Bo} für I_b = 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90 $\hbar$ dargestellt, für I_b = 20 $\hbar$ und 90 $\hbar$ hängt $\tilde{\Delta}_1$ nicht so stark von E_{Bo} ab.

d) Für die Reaktion $^{209}At \rightarrow {}^{12}C + {}^{197}Au$ mit $J_{max} = 66\ \hbar$, $g = 0{,}0194$ MeV, $h = 0{,}0054$ MeV, $b = 8{,}877\ MeV^{-1/2}$ wurde $\tilde{\Delta}_1$ in Abhängigkeit von I_b bzw. E_{Bo} in Fig. (4.8) bzw. Fig. (4.9) gezeigt.

Fig.(4.8) zeigt den Verlauf von $\tilde{\Delta}_1$ als Funktion von I_b für $E_{Bo} = 25{,}50$, 75 und 100 MeV. Die maximale Fehlerschranke bei $I_b = \frac{J_{max}}{2}$ und $E_{Bo} = 25$, 50, 75 und 100 MeV ist 1,36 %, 1,23 %, 1,1 % und 1 %.

Fig. (4.9) zeigt den Verlauf von $\tilde{\Delta}_1$ als Funktion von E_{Bo} für $I_b = 20$, 30, 40 und 50 $\hbar$. Für $I_b = 50\ \hbar$ und $E_{Bo} \geq 62{,}5$ MeV ist $\tilde{\Delta}_1$ nicht so stark von E_{Bo} abhängig.

Fig. (4.10) schließlich zeigt den Verlauf von $\tilde{\Delta}_1$ in Abhängigkeit vom Massenverhältnis der beiden Kerne b und B der vier Reaktionen bei $I_b = 30\ \hbar$ und $E_{Bo} = 25$, 50, 75 und 100 MeV.

Die Rechnungsergebnisse können folgendermaßen zusammengefaßt werden:

1) $\tilde{\Delta}_1$ hat das Maximum an der Stelle $I_b = \frac{J_{max}}{2}$.

2) $\tilde{\Delta}_1$ nimmt mit zunehmender Energie E_{Bo} ab, nur für sehr große I_b hängt $\tilde{\Delta}_1$ nicht so stark von E_{Bo} ab.

3) $\tilde{\Delta}_1$ hat kleine Werte bei kleinem Massenverhältnis der beiden Kerne $\frac{M_b}{M_B}$.

IV. 4. Fehler Δ_3

Im letzten Abschnitt haben wir den Fehler Δ_1 ausgewertet, der sich dadurch ergab, daß bei der Berechnung von B_I die Funktion $f(E')$ durch $f_{app}(E')$ im Gebiet $E_3 < 0 < E_2 \leq E' \leq E_1$ ersetzt wurde. Jetzt wollen wir den Fehler Δ_3, der wegen der entsprechenden Approximation im Gebiet $0 \leq E' \leq E_3$ folgt, berechnen.

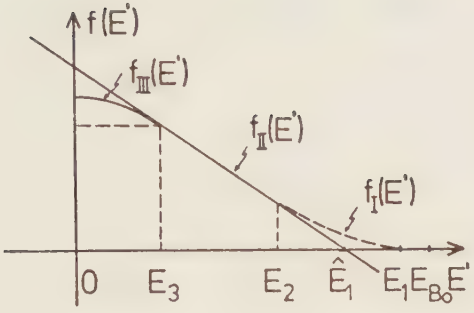


Fig.(4.11): Der qualitative Verlauf von f(E') in Abhängigkeit von E', für den Fall $0 < E_3$.

Der grobe Verlauf von f(E') als Funktion von E' wurde in Fig. (4.11) gezeigt. Die expliziten Formeln von $f_k(E')$ (k = I,II,III) sind in (3.43) aufgeschrieben und die Energien E_i(i = 1,2,3), $\hat{E}_1$ in (3.33) bzw. (3.44).

Wir machen zunächst folgende Abschätzung:

$$\text{Aus } f_{II}(E_3) \leq f_{III}(E')$$

folgt

$$f_{II}(E') - f_{III}(E') \leq f_{II}(E') - f_{II}(E_3) = \frac{\arcsin\sqrt{\frac{h}{g+h}}}{\sqrt{g\,h}}\,(E_3 - E'). \quad (4.26)$$

Wir definieren:

$$(\Delta F_I^J)_3 := K \int_{E'=o}^{E_3} dE'\, e^{b\sqrt{E'}}\,(f_{II}(E') - f_{III}(E')) \quad (4.27)$$

Gl. (4.26) in Gl. (4.27) eingesetzt ergibt

$$(\Delta F_I^J)_3 \leq \frac{K \arcsin\sqrt{\frac{h}{g+h}}}{\sqrt{g\,h}} \int_{E'=0}^{E_3} dE'\, e^{b\sqrt{E'}}\,(E_3 - E') \quad . \quad (4.28)$$

Die Integration in (4.28) kann folgendermaßen berechnet werden:

$$\int_{E'=0}^{E_3} dE'\, e^{b\sqrt{E'}}\,(E_3 - E') = \frac{2}{b^4}\left\{ x^2(1+2e^x)+6(e^x - x\,e^x - 1)\right\}\Big|_{x = b\sqrt{E_3}} \quad . \quad (4.29)$$

Der zweite Term in der geschweiften Klammer der Gl. (4.29) für $0 \leq x$ ist kleiner als Null, d.h.

$$e^x - xe^x - 1 \leq 0 \quad \text{für} \quad 0 \leq x,$$

damit können wir die Gl. (4.29) folgendermaßen

$$\int_{E'=0}^{E_3} dE' e^{b\sqrt{E'}} (E_3 - E') \leq \frac{2E_3}{b^2} (1 + 2e^{b\sqrt{E_3}}) \tag{4.30}$$

abschätzen.

Gl. (4.30) in (4.28) eingesetzt, ergibt

$$(\Delta F_I^J)_3 \leq \frac{2K \arcsin\sqrt{\frac{h}{g+h}}}{b^2\sqrt{gh}} (E_3 + 2E_3 e^{b\sqrt{E_3}}). \tag{4.31}$$

Für $E_3 = E_{Bo} - \frac{gh}{g+h}(I_b + J)^2 \geq o$ ist $\frac{gh}{E_{Bo}(g+h)}(I_b + J)^2 \leq 1$, analog zu (4.14) führen wir folgende Abschätzung ein:

$$\sqrt{E_3} = \sqrt{E_{Bo}}\sqrt{1 - \frac{gh}{E_{Bo}(g+h)}(I_b+J)^2} \leq \sqrt{E_{Bo}}\left\{1 - \frac{gh}{2E_{Bo}(g+h)}(I_b+J)^2\right\} \tag{4.32}$$

Nach (4.31), (4.32) und unter Beachtung von $E_3 = E_{Bo} - \frac{gh}{g+h}(I_b + J)^2$ folgt:

$$(\Delta F_I^J)_3 \leq \frac{2K \arcsin\sqrt{\frac{h}{g+h}}}{b^2\sqrt{gh}} \left\{E_{Bo} - \frac{gh}{g+h}(I_b+J)^2 + 2\left(E_{Bo} - \frac{gh}{g+h}(I_b+J)^2\right) e^{b\sqrt{E_{Bo}}\left(1 - \frac{gh}{2E_{Bo}(g+h)}(I_b+J)^2\right.}\right\} \tag{4.33}$$

Mit den Abkürzungen:

$$\tilde{p} := \frac{2}{b^2} \frac{\arcsin\sqrt{\frac{h}{g+h}}}{\sqrt{gh}}$$

$$\tilde{m} := \frac{gh}{g+h} \tag{4.34}$$

$$\tilde{c} := \frac{gh}{2\sqrt{E_{Bo}}(g+h)} \quad ; \quad s := b\tilde{c}$$

erhalten wir

$$(\Delta F_I^J)_3 \leq K\tilde{p}\left\{E_{Bo} - \tilde{m}(I_b+J)^2 + 2(E_{Bo} - \tilde{m}(I_b+J)^2) e^{b\sqrt{E_{Bo}}} e^{-s(I_b+J)^2}\right\}. \tag{4.35}$$

Analog zu Δ_1 definieren wir:

$$\Delta_3 := \frac{\int_{J=0}^{\min(J_{max}, J_3)} dJ\,(\Delta F_I^J)_3}{\int_{J=0}^{J_{max}} dJ\, F^J_{I_{app.}}} \tag{4.36}$$

In (4.36) ist dabei berücksichtigt, daß $(\Delta F_I^J)_3$ identisch Null wird, wenn $E_3 \leq o$ ist, vgl. (4.28). Mit

$$E_3 = E_{Bo} - \frac{gh}{g+h}\,(I_b + J)^2$$

folgt, daß $(\Delta F_I^J)_3$ Null für

$$J_3 \leq J$$

mit

$$J_3 := \sqrt{\frac{g+h}{gh}\,E_{Bo}} - I_b \quad . \tag{4.37}$$

Die ausführliche Berechnung von Gl. (4.36) wird im Anhang VI durchgeführt, das Ergebnis ist:

$$\Delta_3 \leq \tilde{\Delta}_3 + \tilde{\tilde{\Delta}}_3, \tag{4.38}$$

mit

$$\tilde{\Delta}_3 := \frac{2\tilde{p}}{\tilde{\alpha}}\sqrt{\frac{\tilde{\beta}}{s}}\cdot\frac{\left[E_{Bo}\left\{P(\chi_1^2|1) - P(\chi_2^2|1)\right\} - \frac{\tilde{m}}{2s}\left\{P(\chi_1^2|3) - P(\chi_2^2|3)\right\}\right]}{\left\{\mathrm{erf}\sqrt{\tilde{\beta}}\,(J_{max}-I_b) + \mathrm{erf}(\sqrt{\tilde{\beta}}\,I_b)\right\}}$$

$$\tilde{\tilde{\Delta}}_3 := \frac{2\tilde{p}}{\tilde{\alpha}\,e^{b\sqrt{E_{Bo}}}}\sqrt{\frac{\tilde{\beta}}{\pi}}\;\frac{\left\{E_{Bo}\,\min(J_{max}, J_3) - \frac{\tilde{m}}{3}\left((I_b+\min(J_{max}, J_3))^3 - I_b^3\right)\right\}}{\left\{\mathrm{erf}\sqrt{\tilde{\beta}}\,(J_{max}-I_b) + \mathrm{erf}(\sqrt{\tilde{\beta}}\,I_b)\right\}}$$

$$\chi_1^2 := 2\,s\,\{I_b + \min(J_{max}, J_3)\}^2$$

$$\chi_2^2 := 2\,s\,I_b^2$$

Die Dimensionen der Parameter der Gleichung (4.34) sind:

$\tilde{p}$ und s sind dimensionslos, $[\tilde{m}]$ = MeV, $[\tilde{c}] = \mathrm{MeV}^{1/2}$.

IV. 5. Diskussion der Fehlerschranke $\tilde{\Delta}_3$

Wir wollen ebenfalls mit numerischen Rechnungen und den gewählten vier Reaktionen die prozentuale Fehlerschranke $\tilde{\Delta}_3$ diskutieren. Die Werte von $\tilde{\tilde{\Delta}}_3$ sind wegen des Faktors $e^{-b\sqrt{E_{Bo}}}$ (für nicht zu kleine Werte von E_{Bo}) sehr klein gegen $\tilde{\Delta}_3$ (Faktor 10^{-6} bis 10^{-18}). Deshalb vernachlässigen wir $\tilde{\tilde{\Delta}}_3$ und haben

$$\Delta_3 \leq \tilde{\Delta}_3 \tag{4.39}$$

Die Ergebnisse sind in Fig. (4.12) bis Fig. (4.19) dargestellt.

a) Reaktion $^{39}K \rightarrow {}^{12}C + {}^{27}Al$ mit $J_{max} = 41\ \hbar$ und $J_3 = \sqrt{\frac{g+h}{gh} E_{Bo}} - I_b$, $g = 0{,}062$ MeV, $h = 0{,}1482$ MeV, $b = 3{,}286\ \text{MeV}^{-1/2}$. Die Parameter $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$, $\tilde{p}$, $\tilde{m}$, $\tilde{c}$, s können durch Gln.(3.54) und (4.34) berechnet werden. Die Werte von $P(\chi^2/\nu)$ können durch Gl. (4.22) berechnet werden, und die Werte der Fehlerfunktion sind aus der Tabelle [18].

Fig. (4.12) zeigt den Verlauf der prozentualen Fehlerschranke $\tilde{\Delta}_3$ in Abhängigkeit vom Spin des emittierten Kerns I_b für $E_{Bo} = 50$, 75 und 100 MeV. Man sieht, daß mit wachsendem Spin I_b die Fehlerschranke $\tilde{\Delta}_3$ sehr schnell abnimmt, besonders im Gebiet $I_b < 12\ \hbar$ haben die Kurven einen steilen Abfall.

In Fig. (4.13) ist der Verlauf der prozentualen Fehlerschranke $\tilde{\Delta}_3$ als Funktion der maximalen Anregungsenergie E_{Bo} des Kerns B für $I_b = 8$, 10, 15 und 20 $\hbar$ veranschaulicht. Mit zunehmender Energie E_{Bo} zeigt die Fehlerschranke ein weiteres Ansteigen. Für $I_b = 15\ \hbar$ und 20 $\hbar$ sind die Steigerungen der beiden Kurven fast linear.

b) Reaktion $^{117}Te \rightarrow {}^{40}Ar + {}^{77}Se$ mit $J_{max} = 91\ \hbar$, $b = 5{,}5498\ \text{MeV}^{-1/2}$, $g = 0{,}0093$ MeV, $h = 0{,}0259$ MeV. Fig. (4.14) zeigt den Verlauf von $\tilde{\Delta}_3$ in Abhängigkeit von I_b für $E_{Bo} = 25$, 37,5, 50, 75 und 100 MeV. Für $I_b < 25\ \hbar$ sind die Kurven steil abfallend.

In Fig. (4.15) ist der Verlauf von $\tilde{\Delta}_3$ in Abhängigkeit von E_{Bo} für I_b = 15, 20, 25, 30, 35 und 40 ħ gezeigt. $\tilde{\Delta}_3$ zeigt ein weiteres Ansteigen mit wachsender Energie E_{Bo}. Für I_b = 35 ħ und 40 ħ sind die Steigerungen der beiden Kurven linear.

c) Reaktion $^{205}At \rightarrow {}^{40}Ar + {}^{165}Ho$ mit J_{max} = 105 ħ, g = 0,0056 MeV, h = 0,007 MeV, b = 8,124 $MeV^{-1/2}$.

In Fig. (4.16) ist der Verlauf von $\tilde{\Delta}_3$ in Abhängigkeit von I_b für E_{Bo} = 25, 37,5, 50, 75 und 100 MeV gezeigt. $\tilde{\Delta}_3$ nimmt sehr schnell mit wachsendem Spin I_b ab.

In Fig. (4.17) ist der Verlauf von $\tilde{\Delta}_3$ in Abhängigkeit von E_{Bo} für I_b = 15, 20, 25, 30, 35 und 40 ħ veranschaulicht. Für I_b = 30, 35, 40 ħ wächst $\tilde{\Delta}_3$ langsam an.

d) Reaktion $^{209}At \rightarrow {}^{12}C + {}^{197}Au$ mit J_{max} = 66 ħ, g = 0,0194 MeV, h = 0,0054 MeV, b = 8,877 $MeV^{-1/2}$.

Fig. (4.18) zeigt den Verlauf von $\tilde{\Delta}_3$ in Abhängigkeit von I_b für E_{Bo} = 25, 37,5, 50, 75 und 100 MeV. $\tilde{\Delta}_3$ nimmt ebenfalls sehr schnell mit zunehmendem Spin I_b ab.

Fig. (4.19) zeigt den Verlauf von $\tilde{\Delta}_3$ als Funktion von E_{Bo} für I_b = 10, 15, 20, 25, 30 und 35 ħ.

Die Ergebnisse können folgendermaßen zusammengefaßt werden :

1) Als Funktion vom Spin I_b des emittierten Kerns b nimmt die Fehlerschranke $\bar{\Delta}_3$ mit wachsendem Spin I_b sehr schnell ab, besonders für $I_b \leq 15$ ħ sind die Kurven sehr steil abfallend.

2) $\tilde{\Delta}_3$ in Abhängigkeit von der Energie E_{Bo} wächst mit zunehmender Energie E_{Bo} an, je größer der Spin I_b, um so schwächer nimmt $\tilde{\Delta}_3$ zu. Bei großem Spin I_b sind die Kurven fast linear und langsam ansteigend.

IV. 6. Fehler Δ_2

Mit Δ_2 bezeichnen wir den Fehler, der wegen der Vernachlässigung des Terms $B_{II}(E_b,I_b)$ gegenüber $B_I(E_b,I_b)$ in Formel (3.23) folgt.

Δ_2 ist definiert durch

$$\Delta_2 := \frac{B_{II}(E_b,I_b)}{B_{Iapp}(E_b,I_b)} \quad . \tag{4.40}$$

Aus Gl. (3.86) gilt

$$B_{II}(E_b,I_b) \leq B_{IIAbs.}(E_b,I_b). \tag{4.41}$$

Die Gleichungen (4.40), (4.41), (3.57) und (3.92) lassen sich zusammenfassen zu

$$\Delta_2 \leq \tilde{\Delta}_2 \, , \tag{4.42}$$

mit

$$\tilde{\Delta}_2 = \left(\frac{\tilde{\beta}}{\xi}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{g\sqrt{E_{Bo}-h(I_b+1)^2}\; e^{-b\left(\sqrt{E_{Bo}}-\sqrt{E_{Bo}-h(I_b+1)^2}\right)} \operatorname{erf}\left(\sqrt{\xi}\cdot \min(J_{ex.}, J_{max})\right)}{h\sqrt{E_{Bo}}\left\{\operatorname{erf}\sqrt{\tilde{\beta}}(J_{max}-I_b)+\operatorname{erf}\left(\sqrt{\tilde{\beta}}\, I_b\right)\right\}} \, . \tag{4.43}$$

$\tilde{\Delta}_2$ ist die obere Schranke des Fehlers Δ_2.

Die Parameter g,h,b, $\tilde{\beta}$, ξ und J_{ex} sind in (3.14), (3.54), (3.89) und (3.91) angegeben.

IV. 7. Diskussion der Fehlerschranke $\tilde{\Delta}_2$

Als Beispiele der numerischen Rechnungen wurden die Reaktionen $^{205}At \rightarrow {}^{40}Ar + {}^{165}Ho$ und $^{209}At \rightarrow {}^{12}C + {}^{197}Au$ genommen. Für die zwei anderen Reaktionen ($^{39}K \rightarrow {}^{12}C + {}^{27}Al$ und $^{117}Te \rightarrow {}^{40}Ar + {}^{77}Se$) ist die Fehlerschranke $\tilde{\Delta}_2$ sehr klein gegenüber den zwei ersten Reaktionen. Deshalb erörtern wir an dieser Stelle die beiden letzten Reaktionen nicht.

Unter Benutzung der Formel (4.43) haben wir in Fig. (4.20) den Verlauf der prozentualen Fehlerschranke $\tilde{\Delta}_2$ in Abhängigkeit vom Spin I_b des emittierten Kerns b auf halblogarithmischen Maßstab aufgezeichnet. Die gestrichelten Kurven a, b und c sind die Rechnungsergebnisse der Reaktion $^{209}At \rightarrow {}^{12}C + {}^{197}Au$ mit E_{Bo} = 50, 75 und 100 MeV. Die durchgezogenen Kurven 1,2 und 3 stellen die Rechnungsergebnisse der Reaktion $^{205}At \rightarrow {}^{40}Ar + {}^{165}Ho$ mit E_{Bo} = 50, 75 und 100 MeV dar. Es zeigt sich, daß die Fehlerschranke der beiden Reaktionen mit zunehmendem Spin I_b sehr stark abnimmt und mit zunehmender Energie E_{Bo} zunimmt. Die Fehlerschranke $\tilde{\Delta}_2$ der Reaktion $^{209}At \rightarrow {}^{12}C + {}^{197}Au$ ist wesentlich größer als $\tilde{\Delta}_2$ der Reaktion $^{205}At \rightarrow {}^{40}Ar + {}^{165}Ho$.

Für $I_b \geq 30\ \hbar$ ist die Fehlerschranke der beiden Reaktionen kleiner als 2 %.

In Fign. (4.21) und (4.22) haben wir den Verlauf der prozentualen Fehlerschranke $\tilde{\Delta}_2$ der Reaktionen $^{209}At \rightarrow {}^{12}C + {}^{197}Au$ bzw. $^{205}At \rightarrow {}^{40}Ar + {}^{165}Ho$ in Abhängigkeit von E_{Bo} für I_b = 20, 30, 40 und 50 $\hbar$ im halblogarithmischen Maßstab aufgezeichnet. In den beiden Abbildungen sehen wir, daß beim kleinen Spin I_b $\tilde{\Delta}_2$ langsamer als beim großen Spin anwächst.
Z.B. Bei der Reaktion $^{209}At \rightarrow {}^{12}C + {}^{197}Au$ für I_b = 20 $\hbar$ und E_{Bo} von 50 bis 100 MeV wächst $\tilde{\Delta}_2$ von 4,5 % bis 7,66 % an, für I_b = 40 $\hbar$ und die gleichen Werte von E_{Bo} hat $\tilde{\Delta}_2$ die Werte von $4{,}1 \times 10^{-2}$% bis $3{,}1 \times 10^{-1}$%. Bei der Reaktion $^{205}At \rightarrow {}^{40}Ar + {}^{165}Ho$ für die gleichen Werte von E_{Bo} wächst $\tilde{\Delta}_2$ von 4,2 % bis 7,8 % für I_b = 20 $\hbar$ an und von $1{,}2 \times 10^{-2}$% bis $1{,}6 \times 10^{-1}$% für I_b = 40 $\hbar$.

IV. 8. Schlußbemerkung

Aus den Diskussionen der prozentualen Fehlerschranken $\tilde{\Delta}_i (i = 1,2,3)$ in den Abschnitten (IV.3), (IV.5) und (IV.7) wissen wir, daß I_b im Vergleich zu E_{Bo} eine wichtigere Rolle spielt.

Für $\tilde{\Delta}_1$ liegt das Maximum bei $I_b = \frac{J_{max}}{2}$, $\tilde{\Delta}_1$ nimmt mit zunehmender Energie E_{Bo} ab.

Die Fehlerschranken $\tilde{\Delta}_2$ und $\tilde{\Delta}_3$ nehmen mit wachsendem Spin I_b sehr stark ab, aber sie wachsen langsam mit zunehmender Energie E_{Bo} an.
Z.B.: Für $I_b > 20\ \hbar$ und $E_{Bo} \leq 50$ MeV ist $\tilde{\Delta}_2$ kleiner als 5 %, für $I_b = 30\ \hbar$ und $E_{Bo} = 100$ MeV ist $\tilde{\Delta}_2 \leq 2$ %.

Für nicht zu kleine Werte von I_b kann $\tilde{\Delta}_2$ gegenüber $\tilde{\Delta}_1$ bzw. $\tilde{\Delta}_3$ vernachlässigt werden, dann bleiben nur $\tilde{\Delta}_1$ und $\tilde{\Delta}_3$ zu berücksichtigen. Nach Formel (4.1) und (4.2) kompensieren sich die Fehler teilweise. Die Abschätzungen, die in die Berechnung der Fehlerschranken eingingen, sind auch zum Teil recht grob. Wir dürfen annehmen, daß im allgemeinen durch $\tilde{\Delta}_1 + \tilde{\Delta}_2 + \tilde{\Delta}_3$ der tatsächliche Fehler wesentlich überschätzt wird. Nach diesen Überlegungen können wir feststellen, daß für nicht zu kleine Werte von I_b die Gl. (3.58) eine gute analytische Approximation der Thomas-Formel ist.

V. Die Anwendung

V. 1 Die relative Population

Im Abschnitt III wurde die Auswertung der Thomas-Formel durchgeführt, eine analytische Approximation für den differentiellen Wirkungsquerschnitt abgeleitet und im Abschnitt IV der Fehler diskutiert. In diesem Abschnitt werden wir die Anwendung der ausgewerteten Thomas-Formel behandeln, als Beispiel werden wir die relative Population (RP) der Anregungsenergien E_b und Spins I_b eines Reaktionsprodukts b bei einer Schwerionen-Reaktion

$$a + A \longrightarrow b + B \tag{5.1}$$

(berechnet aufgrund des statistischen Modells) erörtern.

Bezüglich einer willkürlichen Energie E und eines willkürlichen Spins I definieren wir RP:

$$RP = \frac{\frac{d\sigma}{dE_b}(E_b, I_b)}{\frac{d\sigma}{dE_b}(E_b = E, I_b = I)} \quad . \tag{5.2}$$

$\frac{d\sigma}{dE_b}(E_b, I_b)$ ist der differentielle Wirkungsquerschnitt für die Bildung eines Fragments b mit E_b und I_b bei Aufsummation über alle Bahndrehimpulse sowie alle Energien und Spins des Reaktionspartners B. Für diesen Wirkungsquerschnitt haben wir nach (3.58) die Näherungsformel:

$$\frac{d\sigma}{dE_b}(E_b, I_b) = \frac{\pi^2 K_B}{k^2 G_b} \rho(E_b, I_b) \frac{\tilde{\alpha}}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\tilde{\beta}}}\, e^{b\sqrt{E_{Bo}}} \left\{ \operatorname{erf}\sqrt{\tilde{\beta}}\, I_b + \operatorname{erf}\sqrt{\tilde{\beta}}\,(J_{max} - I_b) \right\} \quad , \tag{5.3}$$

$\tilde{\alpha}$ und $\tilde{\beta}$ sind in (3.54) angegeben. Die Indizies B und b beziehen sich auf die beiden Reaktionsprodukte.

Die Niveaudichte des Fragments b $\rho(E_b, I_b)$ läßt sich nach Gln. (3.9), (3.13), (3.14), (3.15) und (3.16) folgendermaßen schreiben:

$$\rho(E_b, I_b) = K_b \left\{ \exp \tilde{b}\sqrt{\left(E_b - \frac{I_b^2}{2C_b}\right)} - \exp \tilde{b}\sqrt{\left(E_b - \frac{(I_b+1)^2}{2C_b}\right)} \right\} \quad , \tag{5.4}$$

mit $$\tilde{b} = 2\sqrt{a_b} = 2\sqrt{\frac{A_b}{10}}$$

$$C_b = \frac{\Theta_b}{\hbar^2} = \frac{1}{\hbar^2}\ \frac{2}{5} A_b R_b^2 m_n$$

A_b und R_b sind die Massenzahl bzw. der Radius des Fragments b.
An dieser Stelle setzen wir (wie früher erläutert) für den Niveaudichteparameter a und das Trägheitsmoment Θ zahlenmäßig Werte nach einfachen Modellen ein.

Aus (3.7a) ist

$$E_{Bo} = (E_b)_{max} - E_b, \tag{5.5}$$

mit $$(E_b)_{max} := E_c - Q - V_c. \tag{5.6}$$

Bei gegebener Energie im Eingangskanal und einer bestimmten Massenaufspaltung des intermediären Komplexes in der Reaktion ist $(E_b)_{max}$ eine feste Zahl.

Als Rechnungsbeispiele nehmen wir zwei Reaktionen:

1) $^{205}At \longrightarrow {}^{40}Ar + {}^{165}Ho$

2) $^{117}Te \longrightarrow {}^{40}Ar + {}^{77}Se$

1) $^{205}At \longrightarrow {}^{40}Ar + {}^{165}Ho$

Wir wollen in diesem Beispiel zunächst ^{40}Ar als das Fragment b und ^{165}Ho als Reaktionspartner B betrachten. Danach soll ^{165}Ho als das Fragment b und ^{40}Ar als Reaktionspartner B angesehen werden.

a) Im Fall $b \equiv {}^{40}Ar$, $B \equiv {}^{165}Ho$.

In Fig. (5.1) ist RP für ^{40}Ar in der (E_b, I_b)-Ebene dargestellt. Für die maximale Energie von b ist 100 MeV($(E_b)_{max}$ = 100 MeV) gewählt und E_{Bo} wird von 25 MeV bis 87,5 MeV variiert, d.h. E_b läuft von 75 MeV bis 12,5 MeV (siehe (5.5)). Als Referenzdaten sind E = 75 MeV, I = 0 gewählt,

$$\text{d.h. RP} = \frac{\frac{d\sigma}{dE_b}(E_b, I_b)}{\frac{d\sigma}{dE_b}(E_b=75\text{MeV}, I_b=0)} \quad .$$

Die Kurven in der Fig. (5.1) geben Linien gleicher relativer Population, die Zahlen an den Kurven sind Zehnerpotenzen. Die Population ist maximal im schraffierten Gebiet , RP $\gtrsim 10^8$.

b) Im Fall b $\equiv {}^{165}$Ho, B $\equiv {}^{40}$Ar :

Fig. (5.2), (5.3) und (5.4) stellen die RP für ^{165}Ho mit gewählten maximalen Energien $(E_b)_{max}$ = 150, 100 und 75 MeV dar, E_{Bo} wird von 25 MeV bis $\{(E_b)_{max} - 12{,}5\}$ MeV variiert, d.h. E_b läuft von $\{(E_b)_{max} - 25\}$ bis 12,5 MeV. Als Referenzdaten sind (E = 125 MeV, I = 0), (E = 75 MeV, I = 0) und (E = 50 MeV, I = 0) gewählt. Die Zahlen an den Kurven sind Zehnerpotenzen. Das Maximum der relativen Population ist RP $\geq 10^1$.

2) $^{117}\text{Te} \rightarrow {}^{40}\text{Ar} + {}^{77}\text{Se}$

a) b $\equiv {}^{40}$Ar, B $\equiv {}^{77}$Se:

Fig. (5.5) zeigt RP für ^{40}Ar, $(E_b)_{max}$ ist 100 MeV gewählt und E_{Bo} wird von 25 MeV bis 87,5 MeV variiert, d.h. E_b läuft von 75 MeV bis 12,5 MeV. Als Referenzdaten sind E = 75 MeV, I = 0 gewählt. Die Zahlen an den Kurven sind Zehnerpotenzen der zugehörigen RP. Die relativen Populationen sind maximal im schraffierten Gebiet, RP $\gtrsim 10^4$.

b) b $\equiv {}^{77}$Se, B $\equiv {}^{40}$Ar:

Fig. (5.6), (5.7) und (5.8) stellen RP für ^{77}Se mit $(E_b)_{max}$ = 150, 100 und 75 MeV dar, E_b wird von 12,5 MeV bis $\{(E_b)_{max} - 25\}$ variiert. Als Referenzdaten sind (E = 125 MeV, I = 0), (E = 75 MeV, I = 0) und (E = 50 MeV, I = 0) gewählt. Die Zahlen an den Kurven sind Zehnerpotenzen. Fig. (5.6) hat Maximum im schraffierten Gebiet, RP $\gtrsim 10^2$, Fig. (5.7) und (5.8) haben Maximum RP $\gtrsim 10^1$.

V. 2 Diskussion

Wir vergleichen Fig. (5.1) und (5.3) der Reaktion $^{205}At \rightarrow {}^{40}Ar + {}^{165}Ho$ bzw. Fig. (5.5) und (5.7) der Reaktion $^{117}Te \rightarrow {}^{40}Ar + {}^{77}Se$. Die gewählte maximale Energie $(E_b)_{max}$ ist 100 MeV.

Es ergibt sich folgende grobe Beziehung:

$$\frac{(A_b)_1}{(A_b)_2} \simeq \frac{(\overline{E_b})_1}{(\overline{E_b})_2} \quad , \qquad (5.7)$$

wobei $\overline{E}_b$ derjenige Wert für die Anregungsenergie E_b des Fragments b ist, wo RP maximal ist. Die Indizies 1 bzw. 2 beziehen sich auf die beiden Fragmenteeiner Reaktion, d.h. im Falle von $^{205}At \rightarrow {}^{40}Ar + {}^{165}Ho$ ist $(A_b)_1 = 40$ und $(A_b)_2 = 165$.

In Fig. (5.9) bis (5.16) wurde RP in Abhängigkeit vom Spin I_b bzw. Anregungsenergie E_b des Fragments b für die gewählte maximale Energie $(E_b)_{max} = 100$ MeV auf halblogarithmischen Maßstab aufgezeichnet.

Fig. (5.9) zeigt RP für ^{40}Ar der Reaktion $^{205}At \rightarrow {}^{40}Ar + {}^{165}Ho$ in Abhängigkeit von I_b. Für E_b = 12,5 , 25 , 37,5 , 50 MeV hat RP die maximalen Werte = $1{,}7 \times 10^{8}$, $1{,}5 \times 10^{6}$, $2{,}2 \times 10^{7}$, $7{,}9 \times 10^{5}$ bei I_b = 3, 4, 4 und 5 ħ. dann nimmt RP mit zunehmendem Spin I_b sehr stark ab.

Fig. (5.10) stellt RP für ^{40}Ar der Reaktion $^{205}At \rightarrow {}^{40}Ar + {}^{165}Ho$ als Funktion von E_b für I_b = 5, 10, 15, 20 ħ dar. RP nimmt zunächst mit wachsender Anregungsenergie E_b bis zu einem Maximum zu, danach nimmt RP sehr stark ab.

Fig. (5.11) stellt RP für ^{165}Ho der Reaktion $^{205}At \rightarrow {}^{40}Ar + {}^{165}Ho$ in Abhängigkeit von I_b dar. Für E_b = 37,5 , 50, 62,5 und 75 MeV hat RP die maximalen Werte = $1{,}27 \times 10^{-2}$, $7{,}1 \times 10^{-1}$, 9,4 , $2{,}75 \times 10^{1}$ bei I_b = 11, 12, 13 und 13 ħ.

Fig. (5.12) zeigt RP für ^{165} Ho in Abhängigkeit von E_b für I_b = 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45 und 50 ħ. RP nimmt mit wachsender Energie E_b zu.

Fig. (5.13) und (5.14) zeigen RP für ^{40}Ar der Reaktion $^{117}Te \rightarrow {}^{40}Ar + {}^{77}Se$ in Abhängigkeit von I_b bzw. E_b. Für E_b = 12,5 , 25, 37,5 , 50 MeV in Fig. (5.13) hat RP die maximalen Werte = 2,48 x 10^3, 1,36 x 10^4, 1,34 x 10^4, 4,17 x 10^3 bei I_b = 3, 4, 5 und 5 $\hbar$. RP nimmt zunächst mit wachsendem Spin I_b sowie wachsender Anregungsenergie E_b bis zu einem Maximum zu, danach nimmt RP sehr stark ab.

Fig.(5.15) und (5.16) stellen RP für ^{77}Se der Reaktion $^{117}Te \rightarrow {}^{40}Ar + {}^{77}Se$ in Abhängigkeit von I_b bzw. E_b dar. Für E_b = 37,5, 50, 62,5 , 75 MeV in Fig. (5.15) hat RP die maximalen Werte = 5,1 , 2,5 x 10^1, 3,9 x 10^1, 1,63 x 10^1 bei I_b = 7, 8, 8 und 8 $\hbar$.

Ein Vergleich der Fign. (5.9) und (5.13) zeigt, daß die Kurven mit gleicher Anregungsenergie E_b die gleiche Gestalt haben, d.h. die Gestalt der Kurven sind nur vom Fragment b und E_b, aber nicht vom Compoundkern abhängig. Die wesentliche Abhängigkeit der RP vom Reaktionspartner B liegt in ihrer unterschiedlichen Größe, d.h. die Kurven werden nur nach oben oder nach unten verschoben. Es ist klar, aus Gln. (5,2), (5.3), (5.4) und (5.5) ist RP für die gewählte maximale Energie $(E_b)_{max}$ = 100 MeV und die gewählten Referenzdaten E = 75 MeV, I = 0 im wesentlichen gegeben durch

$$RP \sim \exp\left\{2\sqrt{\frac{A_B}{10}}\left(\sqrt{100 - E_b} - \sqrt{25}\right)\right\} \cdot (2I_b+1)\sqrt{\frac{75}{E_b}}\exp\left\{2\sqrt{\frac{A_b}{10}}\left(\sqrt{E_b} - \frac{I_b^2\hbar^2}{4\theta_b\sqrt{E_b}} - \sqrt{75}\right)\right\} . \qquad (5.8)$$

Der erste Term hängt von der Massenzahl A_B des Fragments B und der Anregungsenergie E_b des Fragments b ab. Der zweite Term hängt nur vom Spin I_b, A_b und E_b des Fragments b ab.

Nach Gl. (5.8) muß RP als Funktion von I_b bei gleicher Anregungsenergie E_b und Fragment b gleiche Gestalt haben. Für unterschiedliche Reaktionspartner B wird wegen des ersten Terms die Kurve nach oben oder nach unten verschoben.

Anhang I

Berechnung von $F^{J}_{Iapp}(E_b, I_b)$ Gl.(3.47)

$$F^{J}_{Iapp}(E_b,I_b) = \frac{K}{\sqrt{gh}}\left\{ (E_{B0}\arcsin\sqrt{\frac{h}{g+h}} - \sqrt{\frac{h}{g}}(E_{B0}-E_1)) \int_{E'=0}^{\hat{E}_1} dE'\, e^{b\sqrt{E'}} - \arcsin\sqrt{\frac{h}{g+h}} \int_{E'=0}^{\hat{E}_1} dE'\, E' e^{b\sqrt{E'}} \right\}$$

Substitution $x := b\sqrt{E'}$, $dE' = \frac{2}{b^2}\, x\, dx$

$$\int_{E'=0}^{\hat{E}_1} dE'\, e^{b\sqrt{E'}} = \frac{2}{b^2} \int_{x=0}^{b\sqrt{\hat{E}_1}} dx\, x e^x = \frac{2}{b^2}\, e^x (x-1) \Big|_{x=0}^{b\sqrt{\hat{E}_1}}$$

$$\int_{E'=0}^{\hat{E}_1} dE'\, E' e^{b\sqrt{E'}} = \frac{2}{b^4} \int_{x=0}^{b\sqrt{\hat{E}_1}} dx\, x^3 e^x = \frac{2}{b^4}\, e^x (x^3 - 3x^2 + 6x - 6) \Big|_{x=0}^{b\sqrt{\hat{E}_1}}$$

$$F^{J}_{Iapp}(E_b,I_b) = \frac{K}{\sqrt{gh}} \left[\hat{E}_1 \arcsin\sqrt{\frac{h}{g+h}} \cdot \frac{2}{b^2}\left\{ 1 + e^{b\sqrt{\hat{E}_1}} (b\sqrt{\hat{E}_1} - 1) \right\} - \frac{2\arcsin\sqrt{\frac{h}{g+h}}}{b^4} \left\{ 6 + e^{b\sqrt{\hat{E}_1}} (x^3 - 3x^2 + 6x - 6) \Big| \right\} \right.$$

$$\left. \Big|_{x=b\sqrt{\hat{E}_1}} \right.$$

$$= \frac{K}{\sqrt{gh}}\, \frac{2\arcsin\sqrt{\frac{h}{g+h}}}{b^4} \left[x^2 + e^x x^2 (x-1) - \left\{ 6 + e^x x^2 (x-1) + e^x (-2x^2 + 6x - 6) \right\} \right] \Big|_{x=b\sqrt{\hat{E}_1}}$$

$$= \frac{K}{\sqrt{gh}}\, \frac{2\arcsin\sqrt{\frac{h}{g+h}}}{b^4} \left\{ (x^2 - 6) + 2e^x (x^2 - 3x + 3) \right\} \Big|_{x=b\sqrt{\hat{E}_1}}$$

Anhang II

Berechnung von (3.50) mit Hilfe der Sattelpunktsmethode

Die Reihenentwicklung von ln H(x) an der Stelle I_b

$$\ln H(x(J)) = \ln H(x(J=I_b)) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n}{n!} (J-I_b)^n$$

mit

$$C_n = \frac{d^n \ln H(x(J))}{dJ^n} \quad .$$

$$C_1 = \frac{d}{dJ} \ln H(x) = \frac{\partial \ln H(x)}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dJ} = \frac{\frac{\partial H(x)}{\partial x}}{H} \frac{dx}{dJ} = 0$$

$$\frac{\partial H(x)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 - 6 + 2e^x(x^2-3x+3)\right) = 2x\left\{1+e^x(x-1)\right\}$$

$$\frac{dx}{dJ} = b\frac{d}{dJ}\left\{E_{B0} - \frac{\sqrt{\frac{h}{g}}\frac{gh}{g+h}}{\arcsin\sqrt{\frac{h}{g+h}}}(I_b-J)^2\right\}^{\frac{1}{2}} = \frac{b^2\sqrt{\frac{h}{g}}\frac{gh}{g+h}}{\arcsin\sqrt{\frac{h}{g+h}}} \frac{(I_b-J)}{x}$$

$$C_1 = \frac{\left\{1+e^x(x-1)\right\}\frac{2b^2}{\arcsin\sqrt{\frac{h}{g+h}}}\sqrt{\frac{h}{g}}\frac{gh}{g+h}}{x^2-6+2e^x(x^2-3x+3)}(I_b-J) = 0 \quad \Longrightarrow \quad J = I_b$$

$$C_2\Big|_{J=I_b} = \frac{dC_1}{dJ} = \frac{d}{dJ}\left(\frac{\frac{\partial H(x)}{\partial x}}{H(x)}\frac{dx}{dJ}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\frac{\partial H(x)}{\partial x}}{H(x)}\right)\left(\frac{dx}{dJ}\right)^2\Big|_{J=I_b} + \underbrace{\frac{\frac{\partial H(x)}{\partial x}}{H(x)}}_{0}\frac{d^2x}{dJ^2}\Big|_{J=I_b}$$

$$= -\frac{b^2\sqrt{\frac{h}{g}}\frac{gh}{g+h}}{\arcsin\sqrt{\frac{h}{g+h}}} \frac{2\left\{1+e^x(x-1)\right\}}{H(x(J))}\Bigg|_{J=I_b}$$

da $x = b\sqrt{\hat{E}_1} = b\left\{E_{B0} - \frac{\sqrt{\frac{h}{g}}\frac{gh}{g+h}(I_b-J)^2}{\arcsin\sqrt{\frac{h}{g+h}}}\right\}^{\frac{1}{2}}$

an der Stelle $J = I_b \Longrightarrow x = b\sqrt{E_{B0}} =: \tilde{x}$

$$H(\tilde{x}) := H(x(J=I_b)) = \tilde{x}^2 - 6 + 2e^{\tilde{x}}(\tilde{x}^2-3\tilde{x}+3)\Big|_{\tilde{x}=b\sqrt{E_{B0}}} ,$$

damit erhält man für H(x(J)):

$$H(x(J)) \approx H(\tilde{x})\Big|_{\tilde{x}=b\sqrt{E_{B0}}} \exp-\left(\frac{2b^2\sqrt{\frac{h}{g}}\frac{gh}{g+h}}{\arcsin\sqrt{\frac{h}{g+h}}} \cdot \frac{1+e^{\tilde{x}}(\tilde{x}-1)}{H(\tilde{x})}\Bigg|_{\tilde{x}=b\sqrt{E_{B0}}} \frac{(J-I_b)^2}{2}\right)$$

Anhang III.

Berechnung von (4.14)

Wir betrachten zunächst folgende Ungleichung:

Sei $0 \le x \le 1$

$0 \le 1 - x \le 1$

$0 \le \sqrt{1-x} \le 1$

$(\sqrt{1-x})^2 \le \sqrt{1-x}$ oder $1-x \le \sqrt{1-x}$. (III.1)

$$1-x \le 1-x+\frac{x^2}{4} = \left(1-\frac{x}{2}\right)^2$$

$$\sqrt{1-x} \le 1-\frac{x}{2} \quad . \tag{III.2}$$

Aus (3.33) sind

$$E_1 = E_{B0} - \frac{gh}{g+h}(I_b - J)^2$$

$$E_2 = E_{B0} - h\,(I_b - J)^2$$

Im Fall $0 \le E_2 \le E_1$ folgt

$$0 \le \frac{h(I_b-J)^2}{E_{B0}} \le 1 \quad ,$$

nach (III.1) ergibt

$$1 - \frac{h(I_b-J)^2}{E_{B0}} < \sqrt{1 - \frac{h(I_b-J)^2}{E_{B0}}}$$

$$\sqrt{E_{B0}} - \frac{h(I_b-J)^2}{\sqrt{E_{B0}}} \le \sqrt{E_2} \tag{III.3}$$

Für $0 \le E_1$

$$0 \le \frac{gh}{E_{B0}(g+h)}(I_b-J)^2 \le 1 \quad ,$$

nach (III.2) folgt

$$\sqrt{1 - \frac{gh}{E_{B0}(g+h)}(I_b-J)^2} \le \left(1 - \frac{gh}{2E_{B0}(g+h)}(I_b-J)^2\right)$$

$$\sqrt{E_1} \le \sqrt{E_{B0}} - \frac{gh}{2\sqrt{E_{B0}}(g+h)}(I_b-J)^2 \tag{III.4}$$

Anhang IV .

Berechnung der Integration (4.18)

Aus [18] ist

$$\int_0^{\chi^2} dt\,(t)^{\frac{\nu}{2}-1}\, e^{-\frac{t}{2}} = \left[\, 2^{\frac{\nu}{2}}\, \Gamma(\tfrac{\nu}{2}) \,\right] P(\chi^2|\nu)$$

$P(\chi^2/\nu)$ ist "Chi-Square Probability Function"

Mit der Substitution

$$s x^2 = \frac{y}{2} \quad ; \quad dx = \frac{dy}{2^{3/2}\,(sy)^{\frac{1}{2}}}$$

damit folgt

$$\int_{x=(I_b-J_{max})}^{I_b} dx\, x^2\, e^{-sx^2} = \int_{x=0}^{I_b} dx\, x^2 e^{-sx^2} + \int_{x=0}^{(J_{max}-I_b)} dx\, x^2\, e^{-sx^2}$$

$$= \frac{1}{2^{5/2}\, s^{3/2}} \left(\int_{y=0}^{2sI_b^2} dy\, y^{\frac{1}{2}}\, e^{-\frac{y}{2}} + \int_{y=0}^{2s(J_{max}-I_b)^2} dy\, y^{\frac{1}{2}}\, e^{-\frac{y}{2}} \right)$$

$$= \frac{1}{2^{5/2}\, s^{3/2}}\, 2^{3/2}\, \Gamma(\tfrac{3}{2}) \left\{ P(2sI_b^2|3) + P(2s(J_{max}-I_b)^2|3) \right\}$$

$$\int_{x=(I_b-J_{max})}^{I_b} dx\, x^2\, e^{-sx^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{4\, s^{3/2}} \left\{ P(2sI_b^2|3) + P(2s(J_{max}-I_b)^2|3) \right\}$$

analog

$$\int_{x=I_b-J_{max}}^{I_b} dx\, x^2\, e^{-tx^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{4\, t^{3/2}} \left\{ P(2tI_b^2|3) + P(2t(J_{max}-I_b)^2|3) \right\}$$

$$\int_{x=I_b-J_{max}}^{I_b} dx\, x^4\, e^{-sx^2} = \frac{3\sqrt{\pi}}{8\, s^{5/2}} \left\{ P(2sI_b^2|5) + P(2s(J_{max}-I_b)^2|5) \right\}$$

$$\int_{x=I_b-J_{max}}^{I_b} dx\, x^4\, e^{-tx^2} = \frac{3\sqrt{\pi}}{8\, t^{5/2}} \left\{ P(2tI_b^2|5) + P(2t(J_{max}-I_b)^2|5) \right\}$$

Anhang V.

Berechnung von $\frac{\partial}{\partial I_b}\tilde{\Delta}_1$ (4.23)

Aus Abramowitz [18] ist $Q(\chi^2/\nu) := 1 - P(\chi^2/\nu)$ (V.1)

und für $Q(\chi^2/\nu)$ folgende Rekursions- und Ableitungsrelation:

$$Q(\chi^2|\nu+2) = Q(\chi^2|\nu) + \frac{\left(\frac{\chi^2}{2}\right)^{\frac{\nu}{2}} e^{-\frac{\chi^2}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}+1\right)} \qquad (V.2)$$

$$\frac{\partial^m Q(\chi^2|\nu)}{\partial(\chi^2)^m} = \frac{1}{2^m}\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}(-1)^{m+j} Q(\chi^2|\nu-2j) \qquad (V.3)$$

gelten.

Für m=1 folgt

$$\frac{\partial Q(\chi^2|\nu)}{\partial(\chi^2)} = \frac{1}{2}\left\{Q(\chi^2|\nu-2) - Q(\chi^2|\nu)\right\} \qquad (V.4)$$

Wir setzen $\nu+2=\nu'$ in (V.2) ein, damit folgt

$$Q(\chi^2|\nu') = Q(\chi^2|\nu'-2) + \frac{\left(\frac{\chi^2}{2}\right)^{\frac{\nu'-2}{2}} e^{-\frac{\chi^2}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\nu'-2}{2}+1\right)} \qquad (V.5)$$

(V.5) in (V.4) eingesetzt ergibt

$$\frac{\partial Q(\chi^2|\nu)}{\partial(\chi^2)} = -\frac{1}{2}\,\frac{\left(\frac{\chi^2}{2}\right)^{\frac{\nu-2}{2}} e^{-\frac{\chi^2}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\nu-2}{2}+1\right)} \qquad (V.6)$$

Unter Verwendung (V.6) für $\nu=3$ und $\chi^2 = 2s I_b^2$ ergibt

$$\frac{\partial Q(2sI_b^2|3)}{\partial I_b} = \frac{\partial Q(2sI_b^2|3)}{\partial(2sI_b^2)}\cdot\frac{\partial(2sI_b^2)}{\partial I_b} = -\frac{1}{2}\,\frac{(sI_b^2)^{\frac{1}{2}} e^{-sI_b^2}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right)}\cdot 4sI_b$$

$$= -\frac{4I_b^2}{\sqrt{\pi}}\,s^{3/2} e^{-sI_b^2}$$

Analog

$$\frac{\partial Q(2s(J_{max}-I_b)^2|3)}{\partial I_b} = \frac{4s^{3/2}(J_{max}-I_b)^2}{\sqrt{\pi}}\, e^{-s(J_{max}-I_b)^2}$$

$$\frac{\partial Q(2sI_b^2|5)}{\partial I_b} = -\frac{8I_b^4 s^{5/2}}{3\sqrt{\pi}}\, e^{-sI_b^2} \qquad (V.7)$$

$$\frac{\partial Q(2s(J_{max}-I_b)^2|5)}{\partial I_b} = \frac{8(J_{max}-I_b)^4 s^{5/2}}{3\sqrt{\pi}}\, e^{-s(J_{max}-I_b)^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial I_b}\frac{\tilde{d}}{s^{3/2}}\left\{P(2sI_b^2|3)+P(2s(J_{max}-I_b)^2|3)\right\}$$

$$=\frac{\tilde{d}}{s^{3/2}}\frac{\partial}{\partial I_b}\left\{2-Q(2sI_b^2|3)-Q(2s(J_{max}-I_b)^2|3)\right\} \qquad \text{(nach (V.1))}$$

$$=\frac{\tilde{d}}{s^{3/2}}\left\{\frac{4I_b^2}{\sqrt{\pi}}s^{3/2}e^{-sI_b^2}-\frac{4(J_{max}-I_b)^2}{\sqrt{\pi}}s^{3/2}e^{-s(J_{max}-I_b)^2}\right\} \qquad \text{(nach (V.7))}$$

$$=\frac{4\tilde{d}}{\sqrt{\pi}}e^{-sI_b^2}\left\{I_b^2-(J_{max}-I_b)^2e^{-sJ_{max}(J_{max}-2I_b)}\right\}$$

Analog

$$\frac{\partial}{\partial I_b}\frac{\tilde{d}}{t^{3/2}}\left\{P(2tI_b^2|3)+P(2t(J_{max}-I_b)^2|3)\right\}=\frac{4\tilde{d}}{\sqrt{\pi}}e^{-tI_b^2}\left\{I_b^2-(J_{max}-I_b)^2e^{-tJ_{max}(J_{max}-2I_b)}\right\}$$

$$\frac{\partial}{\partial I_b}\frac{3}{2}\frac{\tilde{c}}{s^{5/2}}\left\{P(2sI_b^2|5)+P(2s(J_{max}-I_b)^2|5)\right\}=\frac{4\tilde{c}}{\sqrt{\pi}}e^{-sI_b^2}\left\{I_b^4-(J_{max}-I_b)^4e^{-sJ_{max}(J_{max}-2I_b)}\right\} \qquad \text{(V.8)}$$

$$\frac{\partial}{\partial I_b}\frac{3}{2}\frac{\tilde{\ell}}{t^{5/2}}\left\{P(2tI_b^2|5)+P(2t(J_{max}-I_b)^2|5)\right\}=\frac{4\tilde{\ell}}{\sqrt{\pi}}e^{-tI_b^2}\left\{I_b^4-(J_{max}-I_b)^4e^{-tJ_{max}(J_{max}-2I_b)}\right\}$$

Aus Abramowitz [18] ist: $\frac{d^{n+1}}{dz^{n+1}}erf\,z=(-1)^n\frac{2}{\sqrt{\pi}}H_n(z)e^{-z^2}$, $n=0,1,2,\ldots$

für $n=0$ $$\frac{d}{dz}erf\,z=\frac{2}{\sqrt{\pi}}H_0(z)e^{-z^2}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-z^2} \qquad \text{(V.9)}$$

$$\frac{\partial}{\partial I_b}\left\{erf\sqrt{\tilde{\beta}}(J_{max}-I_b)+erf\sqrt{\tilde{\beta}}\,I_b\right\}$$

$$=\frac{\partial}{\partial(\sqrt{\tilde{\beta}}(J_{max}-I_b))}erf\sqrt{\tilde{\beta}}(J_{max}-I_b)\cdot\frac{\partial}{\partial I_b}\sqrt{\tilde{\beta}}(J_{max}-I_b)+\sqrt{\tilde{\beta}}\,\frac{\partial}{\partial(\sqrt{\tilde{\beta}}I_b)}erf\sqrt{\tilde{\beta}}\,I_b$$

$$=-\sqrt{\tilde{\beta}}\,\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-\tilde{\beta}(J_{max}-I_b)^2}+\sqrt{\tilde{\beta}}\,\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-\tilde{\beta}I_b^2}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\tilde{\beta}}\,e^{-\tilde{\beta}I_b^2}\left\{1-e^{-\tilde{\beta}J_{max}(J_{max}-2I_b)}\right\} \qquad \text{(V.10)}$$

Man setzt die Gln. (V.8) und (V.10) in (4.23) ein, damit erhält man Gl.(4.24).

Anhang VI.

Berechnung der Gl. (4.36)

Aus Gl.(4·35)

$$(\Delta F_I^J)_3 \le K\hat{p}\left\{E_{B0} - \tilde{m}(I_b+J)^2 + 2(E_{B0} - \hat{m}(I_b+J)^2)\, e^{b\sqrt{E_{B0}}} e^{-s(I_b+J)^2}\right\} \qquad (VI\cdot 1)$$

$$\int_{J=0}^{\min(J_{max},J_3)} dJ\left\{E_{B0} - \hat{m}(I_b+J)^2\right\} = E_{B0}\cdot\min(J_{max},J_3) - \hat{m}\int_{J=0}^{\min(J_{max},J_3)} d(I_b+J)\,(I_b+J)^2 = E_{B0}\cdot\min(J_{max},J_3) - \frac{\hat{m}}{3}\left\{(I_b+\min(J_{max},J_3))^3 - I_b^3\right\} \qquad (VI\cdot 2)$$

Substitution: $s(I_b+J)^2 = \frac{y}{2}$; $dJ = \frac{1}{2^{3/2}\sqrt{s}}\, y^{-\frac{1}{2}} dy$

$$\int_{J=0}^{\min(J_{max},J_3)} dJ\left\{E_{B0} - \hat{m}(I_b+J)^2\right\} e^{-s(I_b+J)^2} = \frac{E_{B0}}{2^{3/2}\sqrt{s}} \int_{y=2sI_b^2}^{2s\{I_b+\min(J_{max},J_3)\}^2} dy\, y^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{y}{2}} - \frac{\hat{m}}{2^{5/2}s^{3/2}} \int_{y=2sI_b^2}^{2s\{I_b+\min(J_{max},J_3)\}^2} dy\, y^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{y}{2}}$$

Mit

$$\int_{t=0}^{\chi^2} dt\, t^{\frac{\nu}{2}-1} e^{-\frac{t}{2}} = 2^{\frac{\nu}{2}}\Gamma\left(\tfrac{\nu}{2}\right)\cdot P(\chi^2|\nu)$$

erhalten wir

$$\int_{J=0}^{\min(J_{max},J_3)} dJ\left\{E_{B0} - \hat{m}(I_b+J)^2\right\} e^{-s(I_b+J)^2} = \frac{E_{B0}}{2}\sqrt{\frac{\pi}{s}}\left\{P(\chi_1^2|1) - P(\chi_2^2|1)\right\} - \frac{\hat{m}}{4}\frac{\sqrt{\pi}}{s^{3/2}}\left\{P(\chi_1^2|3) - P(\chi_2^2|3)\right\}$$

mit

$$\chi_1^2 := 2s\{I_b + \min(J_{max}, J_3)\}^2 \qquad (VI\cdot 3)$$

$$\chi_2^2 := 2sI_b^2$$

Insgesamt folgt somit nach (4.36), (VI·1), (V·2), (VI·3) und (3·57) das Resultat:

$$\Delta_3 := \frac{\int_{J=0}^{\min(J_{max},J_3)} dJ\,(\Delta F_I^J)_3}{\int_{J=0}^{J_{max}} dJ\, F_{I_{app.}}^J} \le \frac{2\tilde{p}}{\tilde{\alpha}}\sqrt{\frac{\tilde{\beta}}{s}}\cdot\frac{\left[E_{B0}\left\{P(\chi_1^2|1) - P(\chi_2^2|1)\right\} - \frac{\tilde{m}}{2s}\left\{P(\chi_1^2|3) - P(\chi_2^2|3)\right\}\right]}{\left\{\mathrm{erf}\sqrt{\tilde{\beta}}(J_{max}-I_b) + \mathrm{erf}(\sqrt{\tilde{\beta}}\, I_b)\right\}} +$$

$$\frac{2\tilde{p}}{\tilde{\alpha}\, e^{b\sqrt{E_{B0}}}}\sqrt{\frac{\tilde{\beta}}{\pi}}\,\frac{\left\{E_{B0}\cdot\min(J_{max},J_3) - \frac{\tilde{m}}{3}\left[(I_b+\min(J_{max},J_3))^3 - I_b^3\right]\right\}}{\left\{\mathrm{erf}\sqrt{\tilde{\beta}}(J_{max}-I_b) + \mathrm{erf}(\sqrt{\tilde{\beta}}\, I_b)\right\}}$$

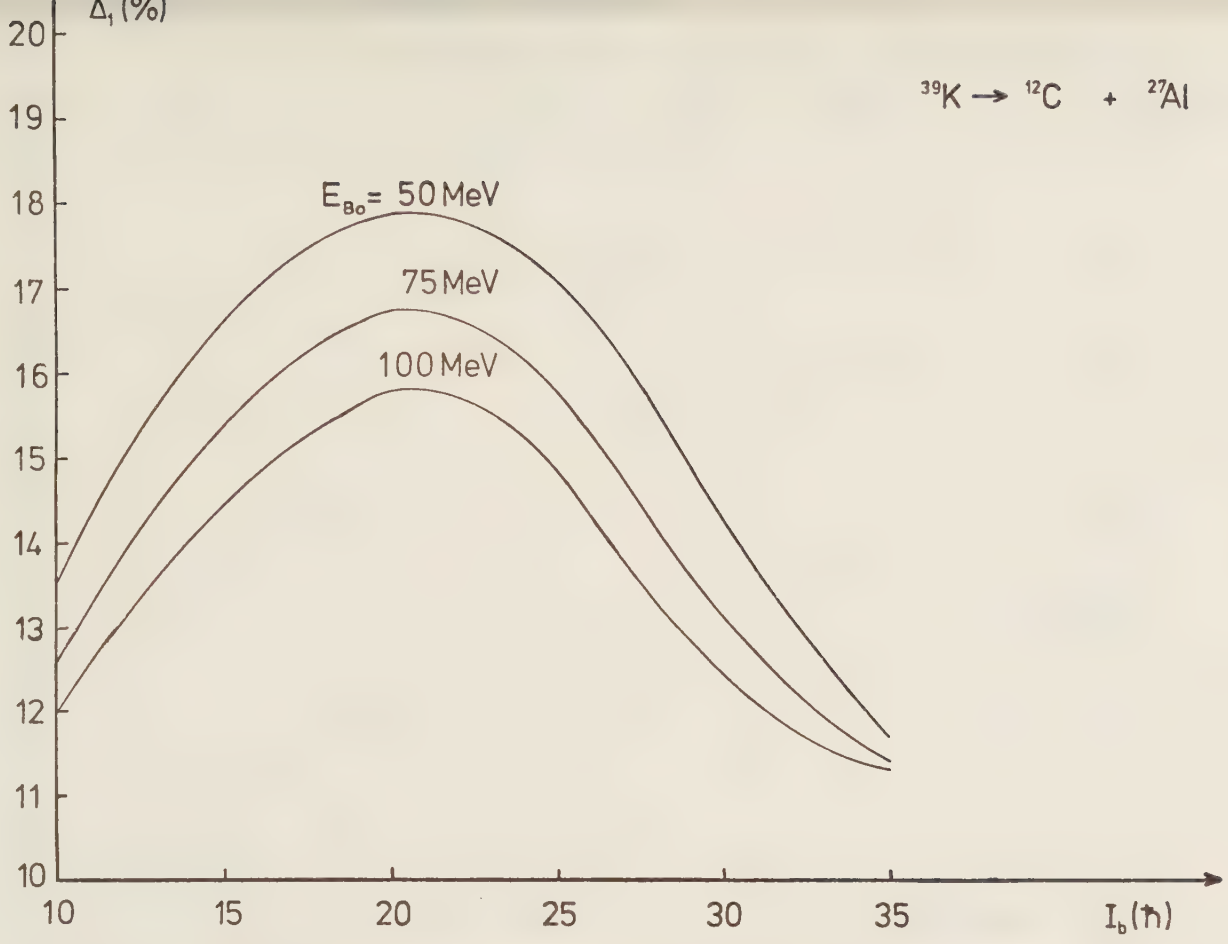


Fig.(4.2): Der Verlauf der prozentualen Fehlerschranke $\tilde{\Delta}_1$ in Abhängigkeit von I_b der Reaktion $^{39}K \rightarrow {}^{12}C + {}^{27}Al$ für die drei Werte von E_{Bo}.

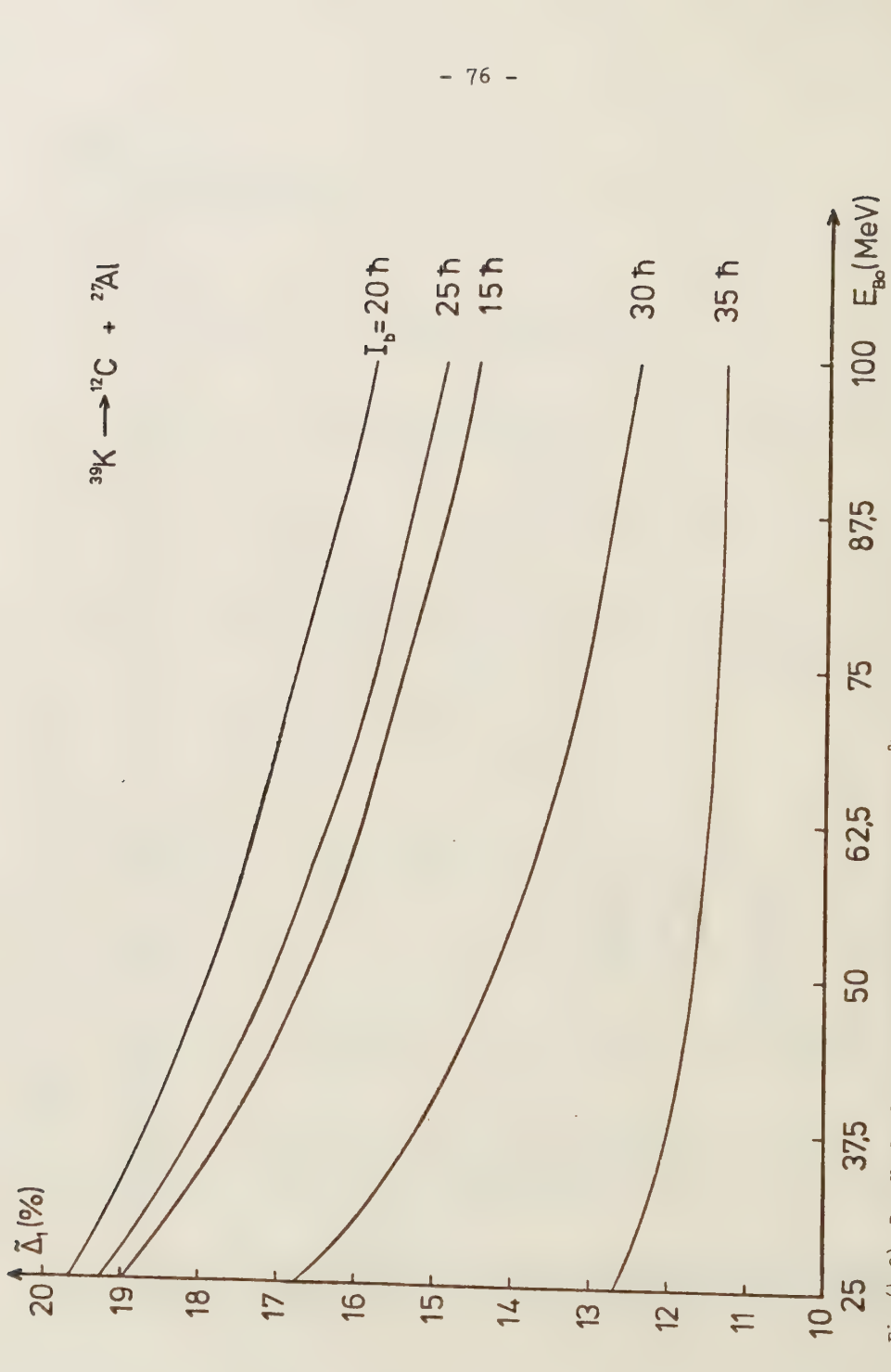


Fig.(4.3): Der Verlauf der prozentualen Fehlerschranke $\tilde{\Delta}_1$ in Abhängigkeit von E_{Bo} der Reaktion

$^{39}K \rightarrow {}^{12}C + {}^{27}Al$ für verschiedene Werte von I_b

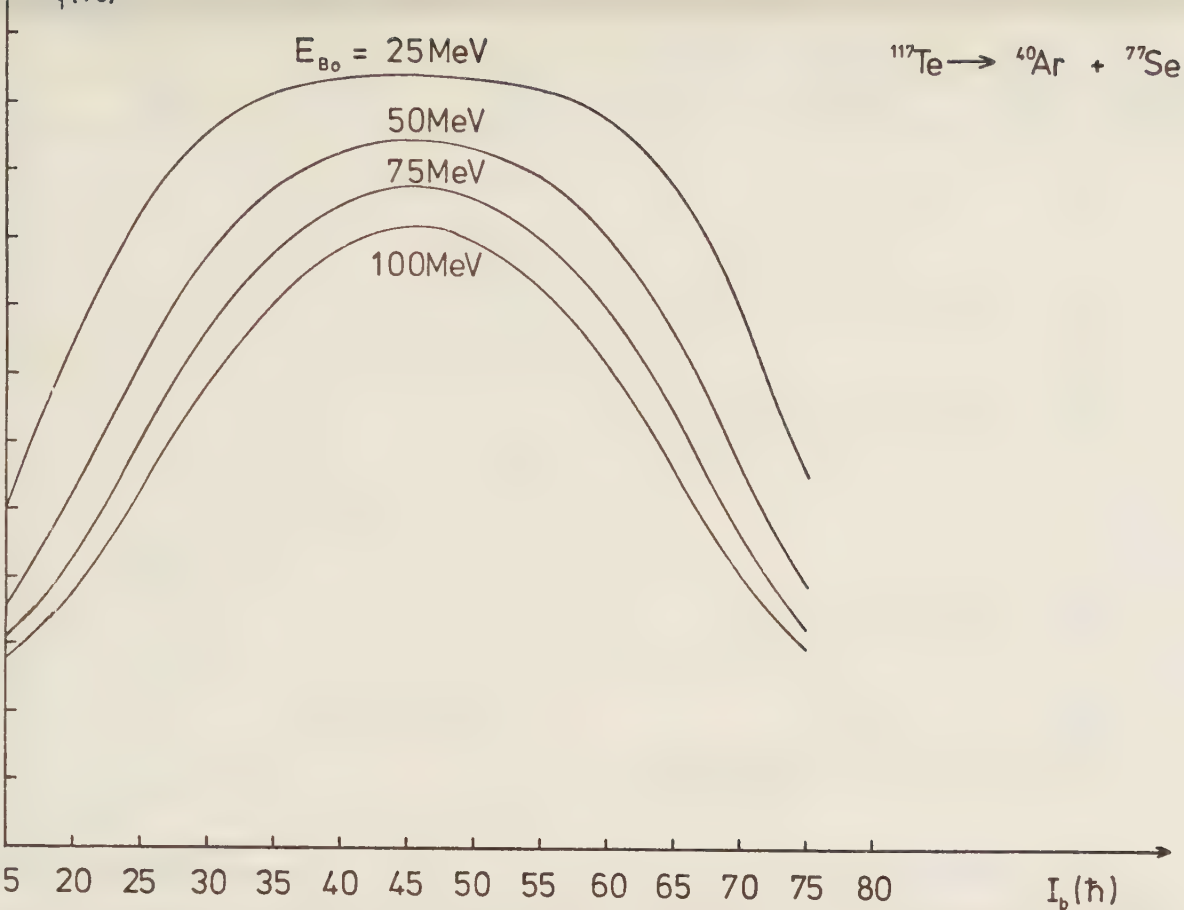


Fig.(4.4): Der Verlauf der prozentualen Fehlerschranke $\tilde{\Delta}_1$ in Abhängigkeit von I_b der Reaktion $^{117}Te \rightarrow {}^{40}Ar + {}^{77}Se$ für die vier verschiedenen Werte von E_{Bo}.

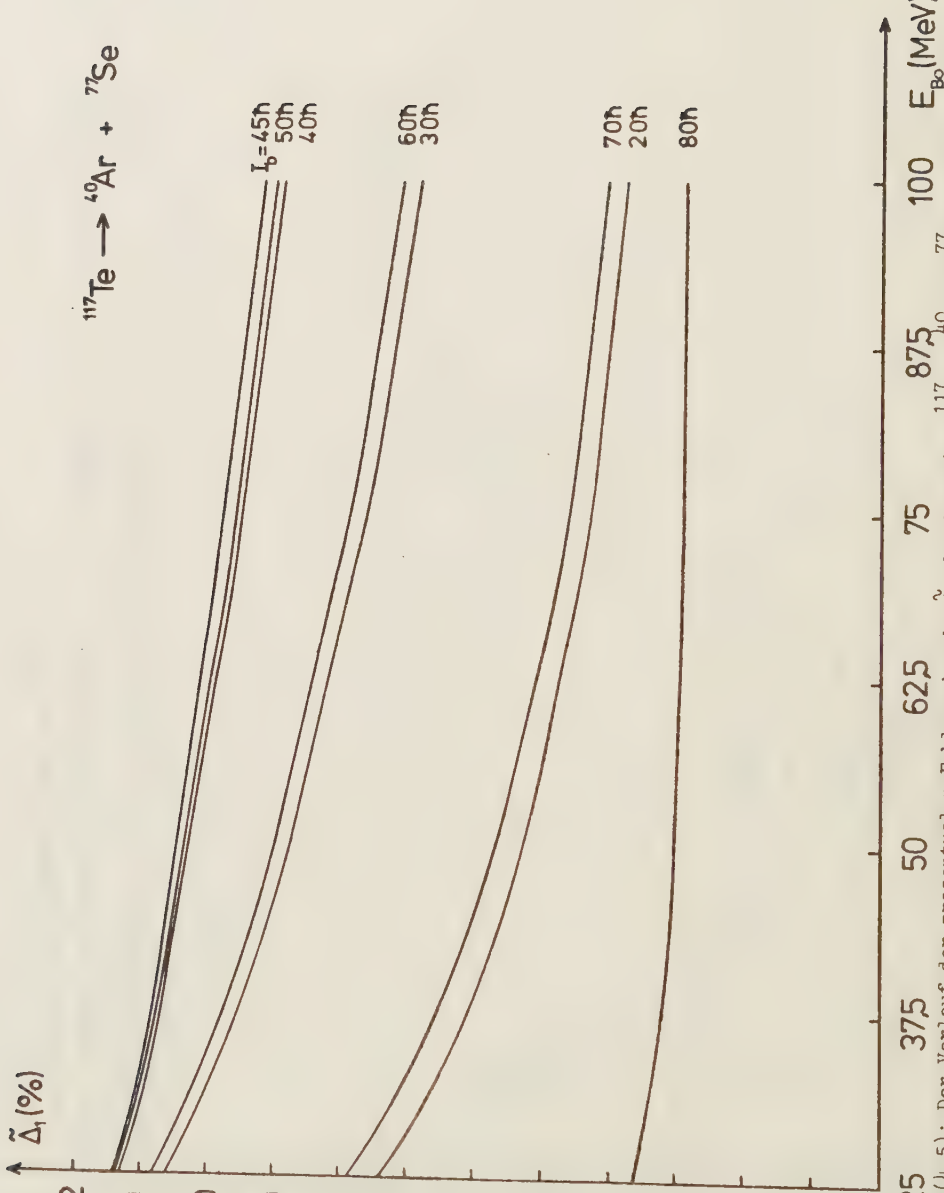


Fig.(4.5): Der Verlauf der prozentualen Fehlerschranke $\tilde{\Delta}_1$ der Reaktion $^{117}Te \rightarrow {}^{40}Ar + {}^{77}Se$ von E_{Bo} für verschiedene Werte von I_b.

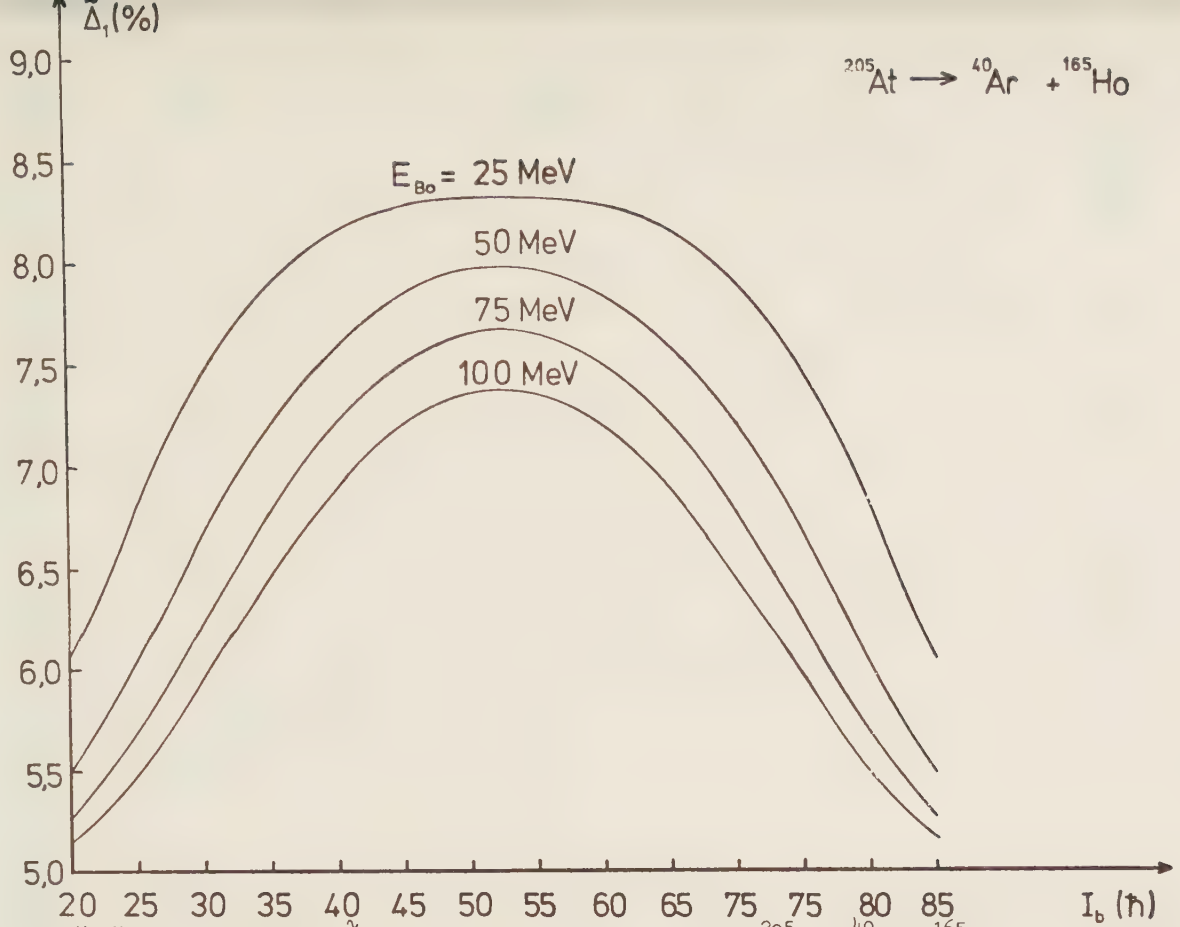


Fig.(4.6): Der Verlauf von $\hat{\Delta}_1$ als Funktion von I_b der Reaktion $^{205}At \longrightarrow {}^{40}Ar + {}^{165}Ho$, für E_{Bo} = 25,50,75 u. 100 MeV.

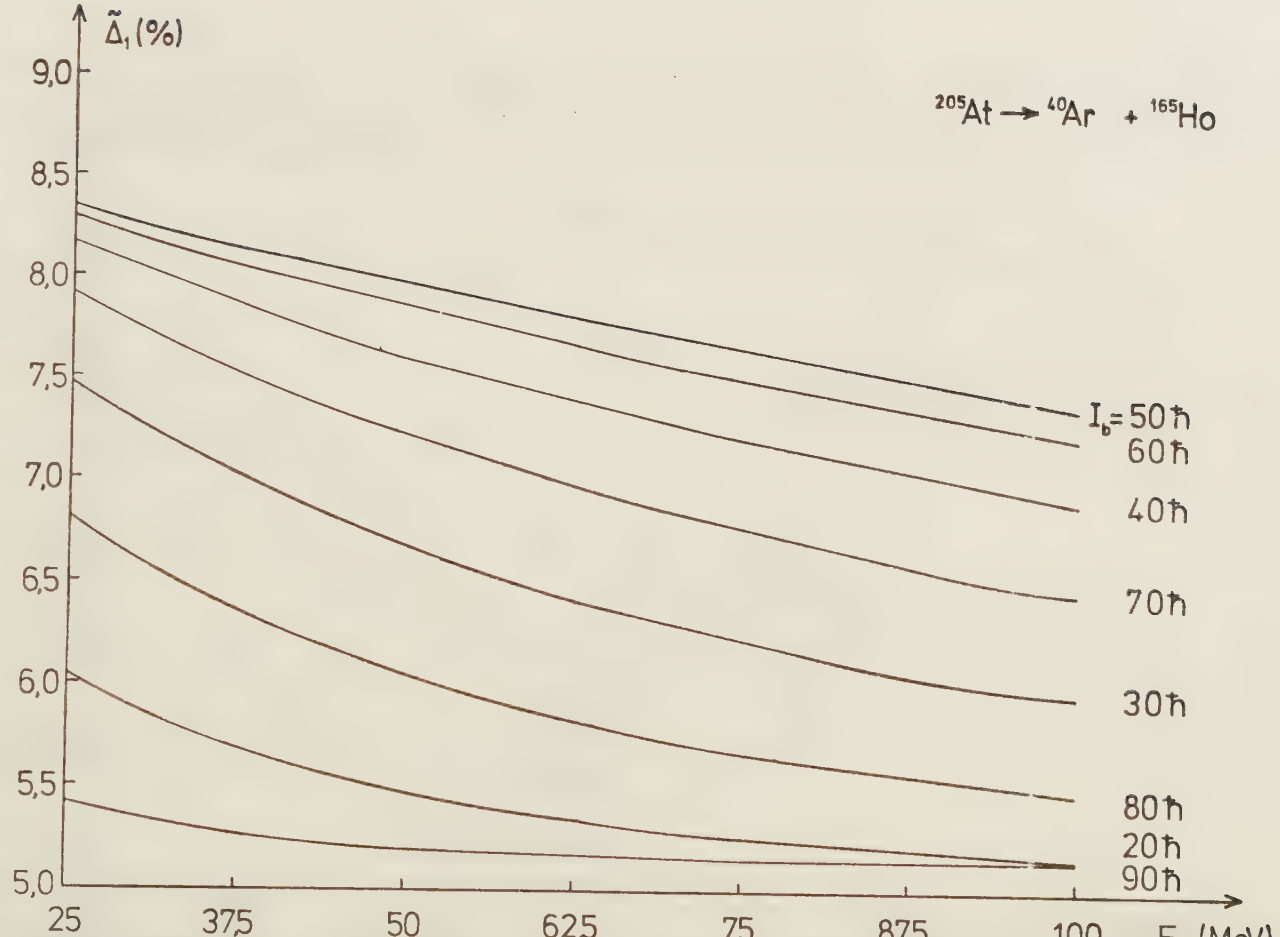


Fig.(4.7): Der Verlauf von $\tilde{\Delta}_1$ als Funktion von E_{Bo} der Reaktion $^{205}At \rightarrow {}^{40}Ar + {}^{165}Ho$ für verschiedene Werte von I_b.

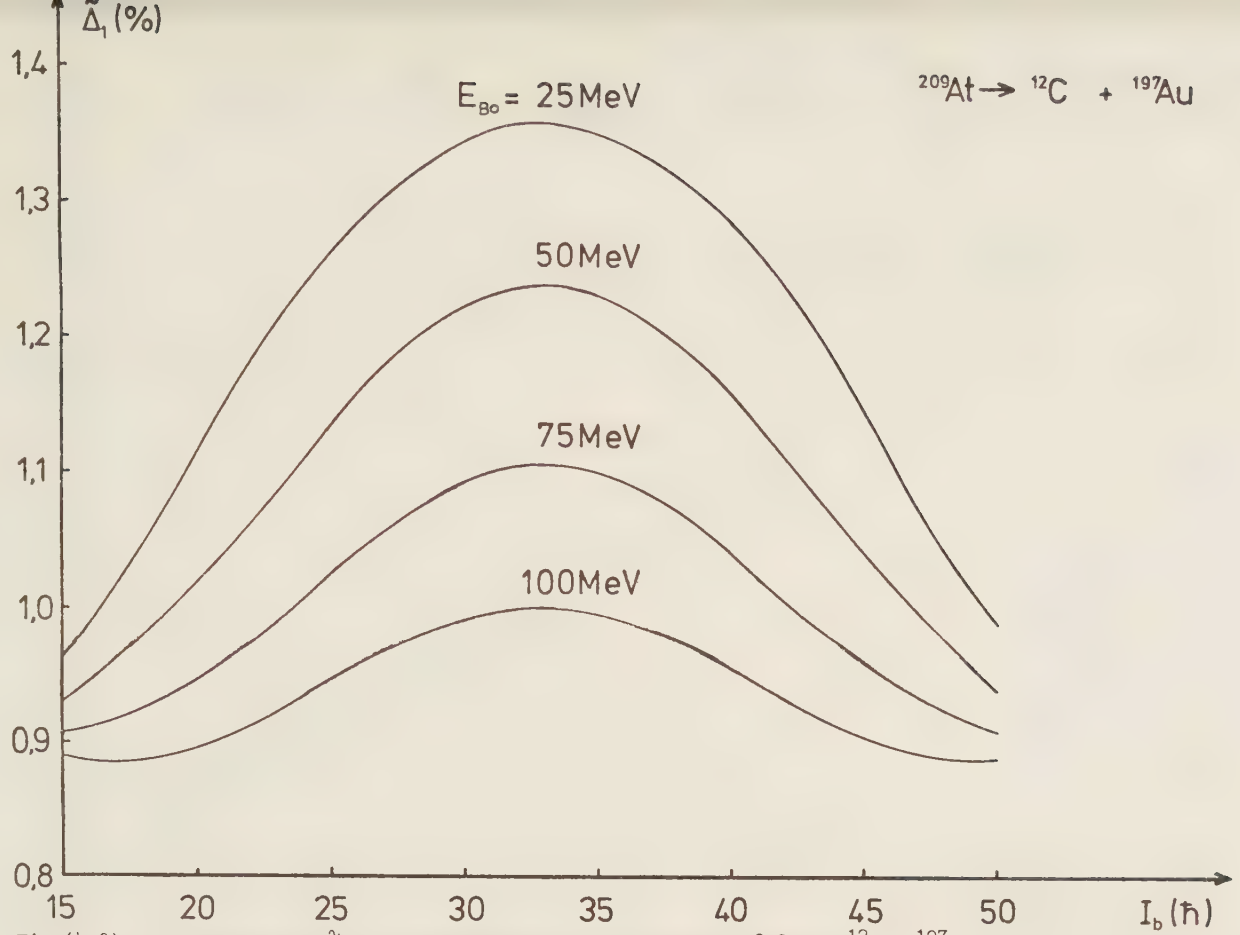


Fig.(4.8): Der Verlauf von $\tilde{\Delta}_1$ als Funktion von I_b der Reaktion $^{209}At \rightarrow {}^{12}C + {}^{197}Au$ für vier Werte von E_{Bo}.

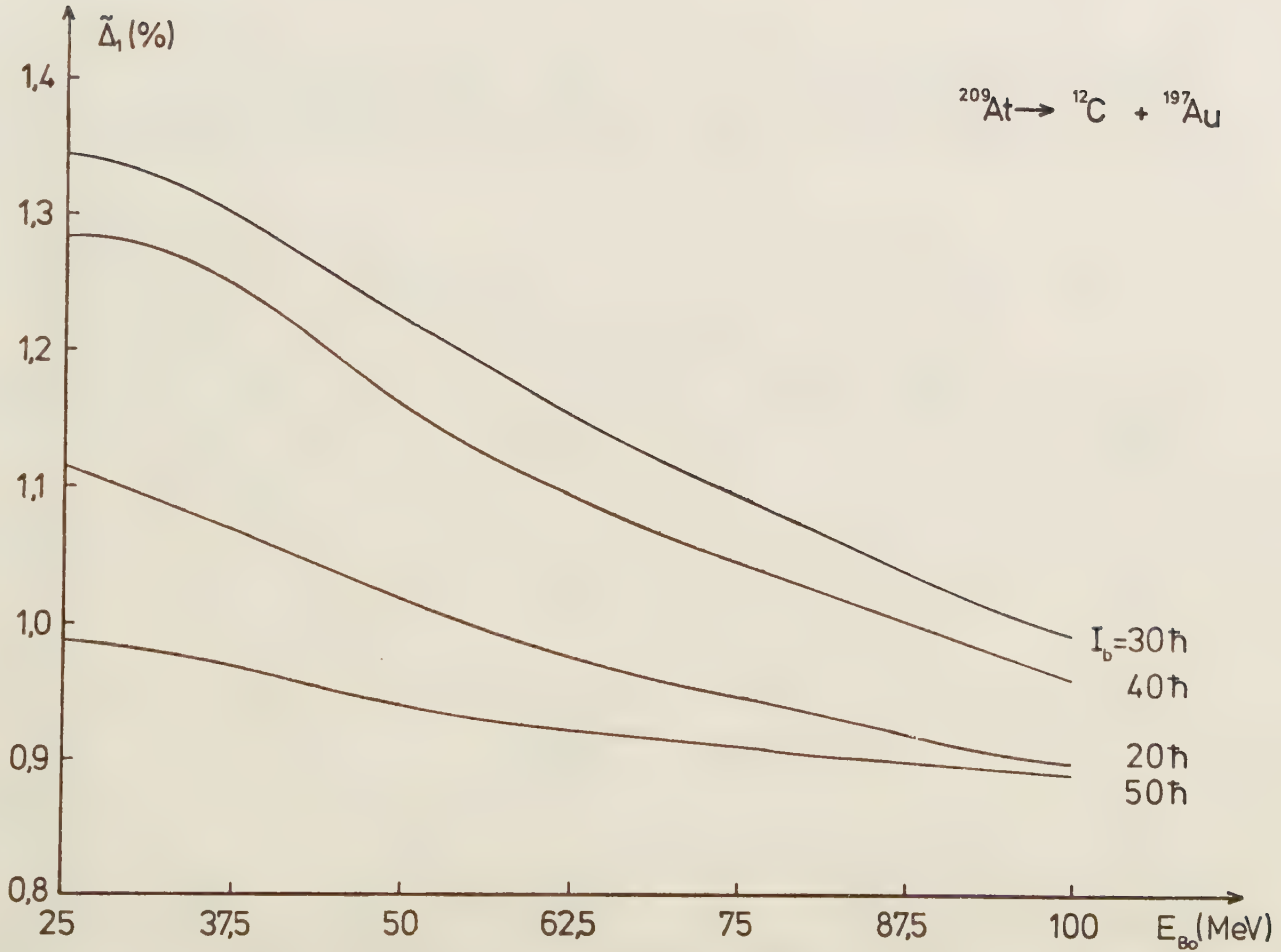
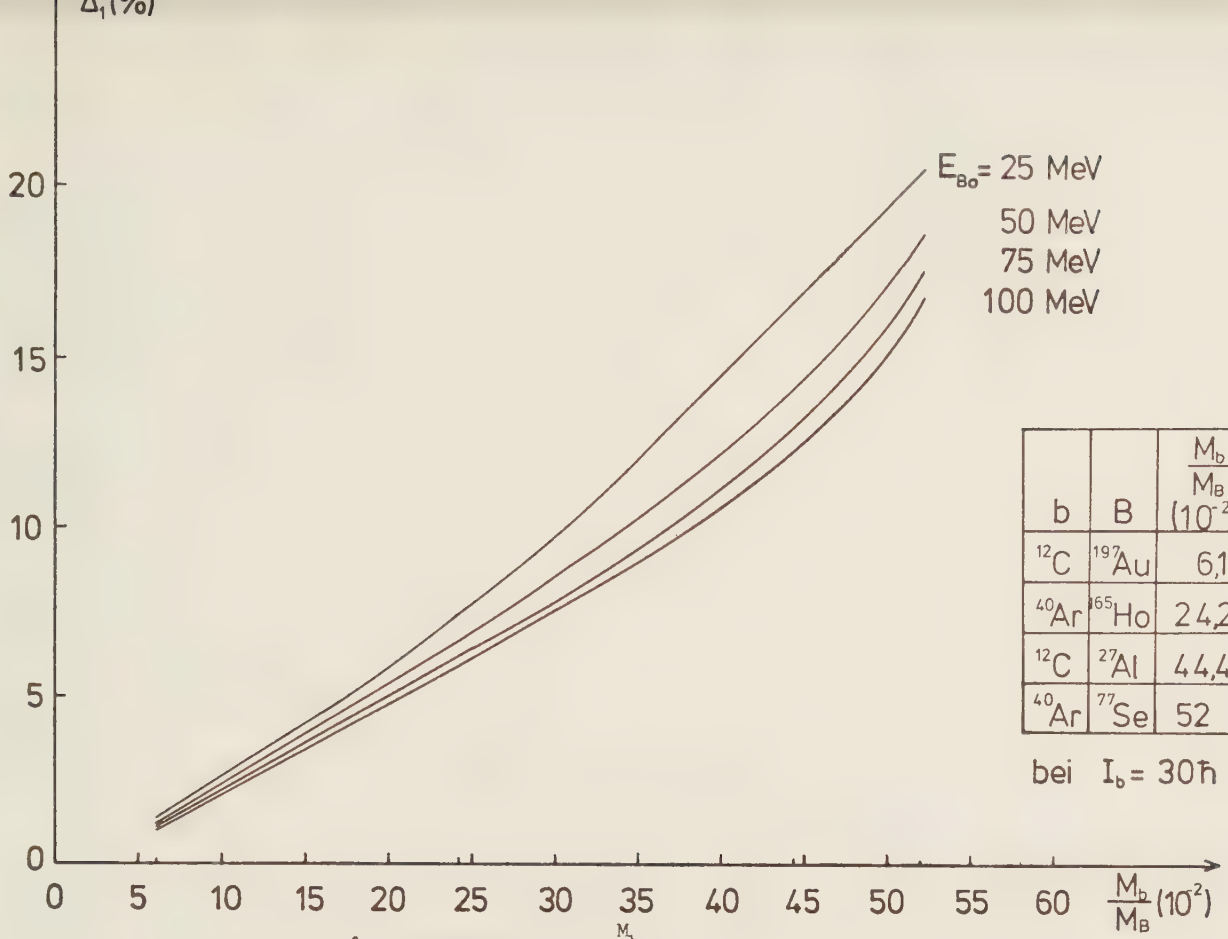


Fig.(4.9): Der Verlauf von $\tilde{\Delta}_1$ als Funktion von E_{Bo} der Reaktion $^{209}At \rightarrow {}^{12}C + {}^{197}Au$, für I_b = 20,30,40,50 ħ .



b	B	$\frac{M_b}{M_B}$ (10^{-2})
^{12}C	^{197}Au	6,1
^{40}Ar	^{165}Ho	24,2
^{12}C	^{27}Al	44,4
^{40}Ar	^{77}Se	52

bei I_b= 30ħ

Fig.(4.10): Der Verlauf von $\tilde{\Delta}_1$ in Abhängigkeit von $\frac{M_b}{M_B}$ der vier Reaktionen für I_b= 30 ħ und vier Werte von E_{Bo}.

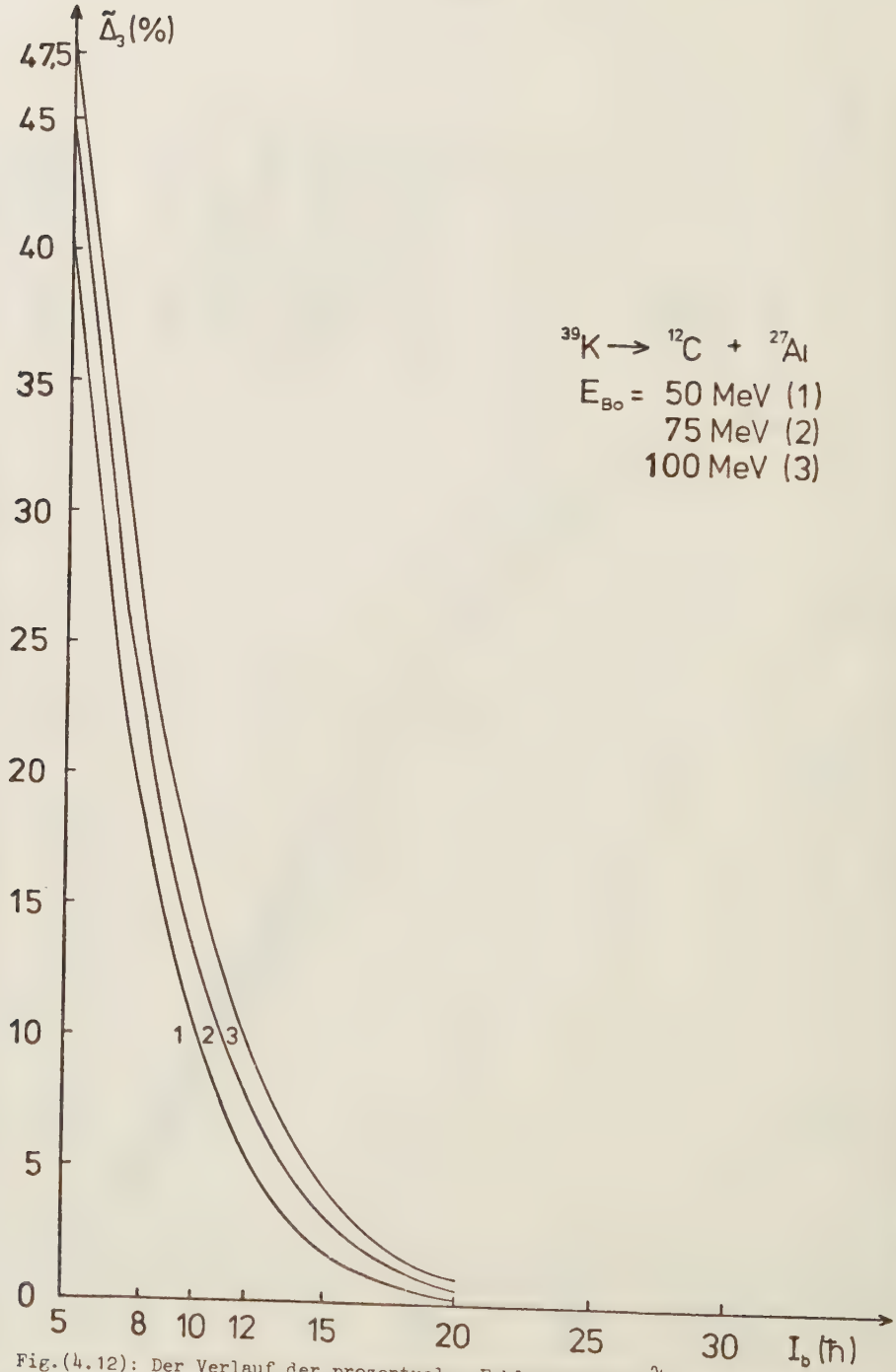


Fig.(4.12): Der Verlauf der prozentualen Fehlerschranke $\tilde{\Delta}_3$ der Reaktion $^{39}K \rightarrow {}^{12}C + {}^{27}Al$ in Abhängigkeit

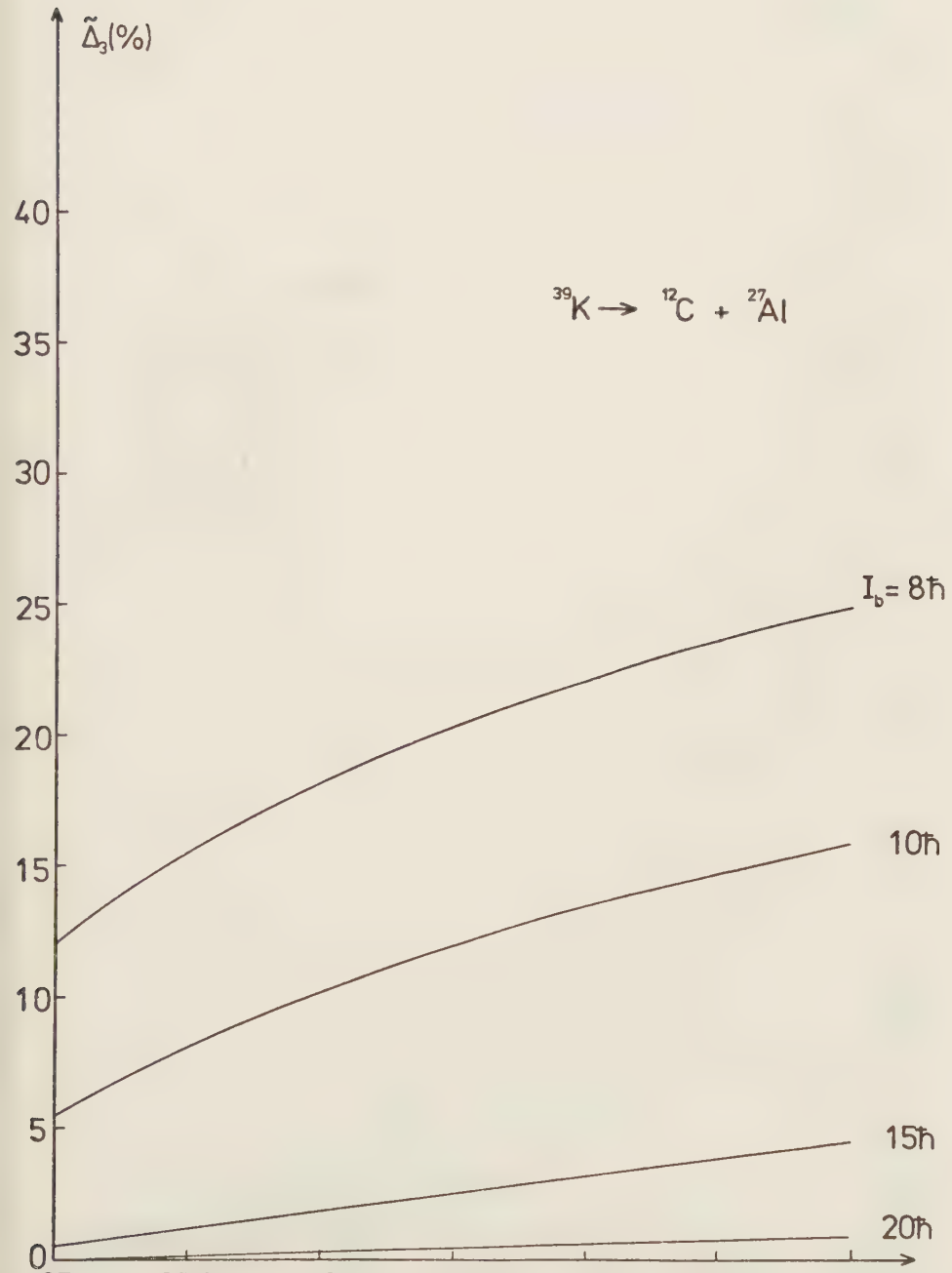


Fig.(4.13): Der Verlauf von $\tilde{\Delta}_3$ der Reaktion $^{39}K \rightarrow {}^{12}C + {}^{27}Al$ in Abhängigkeit von E_{Bo} für vier Werte von I_b.

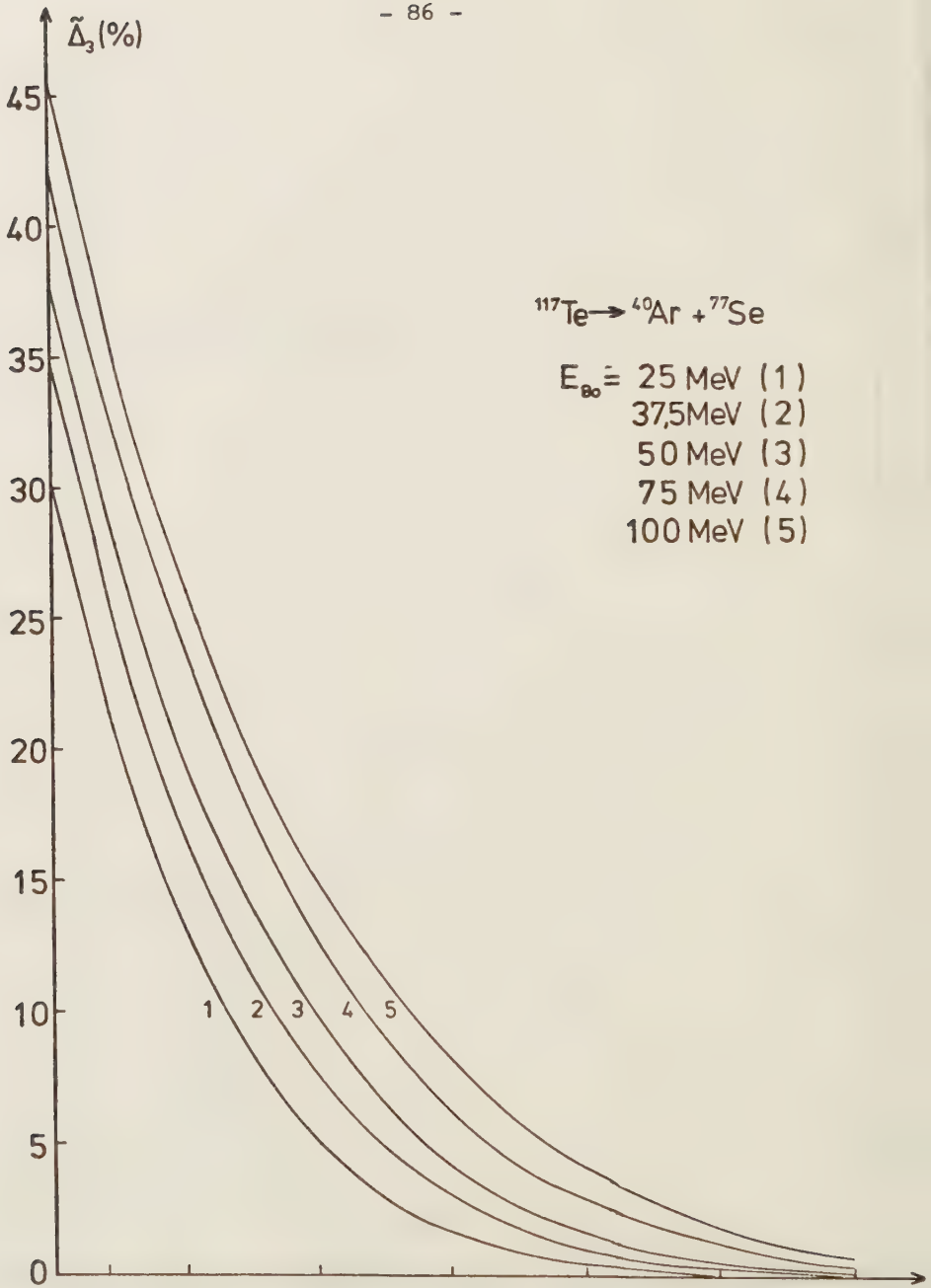


Fig.(4.14): Der Verlauf von $\tilde{\Delta}_3$ der Reaktion $^{117}Te \rightarrow {}^{40}Ar + {}^{77}Se$ in Abhängigkeit von I_b für fünf Werte von E_{Bo}.

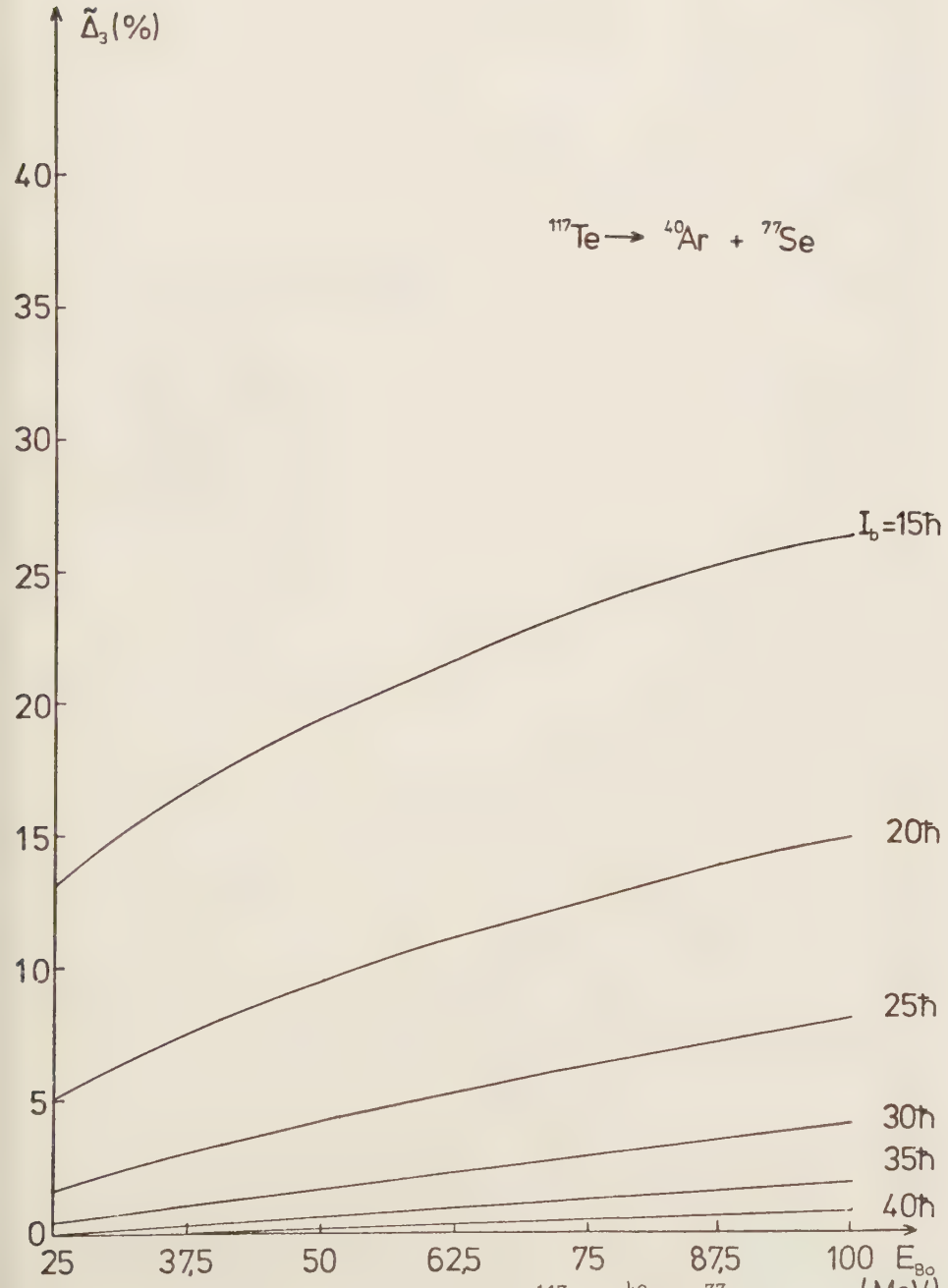


Fig.(4.15): Der Verlauf von $\tilde{\Delta}_3$ der Reaktion $^{117}Te \rightarrow {}^{40}Ar + {}^{77}Se$ in Abhängigkeit von E_{Bo} für sechs Werte von I_b.

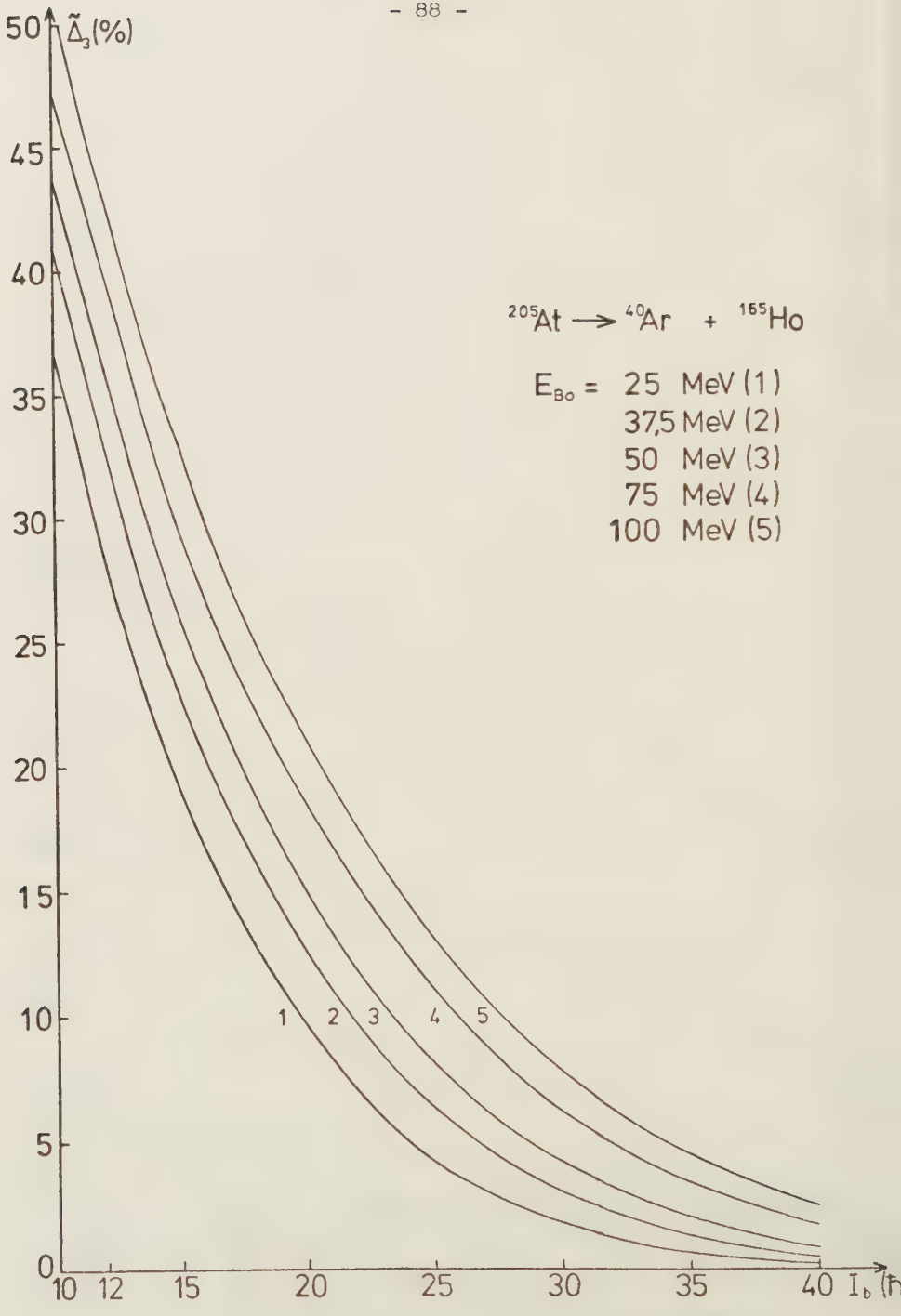


Fig.(4.16): Der Verlauf von $\tilde{\Delta}_3$ der Reaktion $^{205}At \longrightarrow {}^{40}Ar + {}^{165}Ho$ in Abhängigkeit

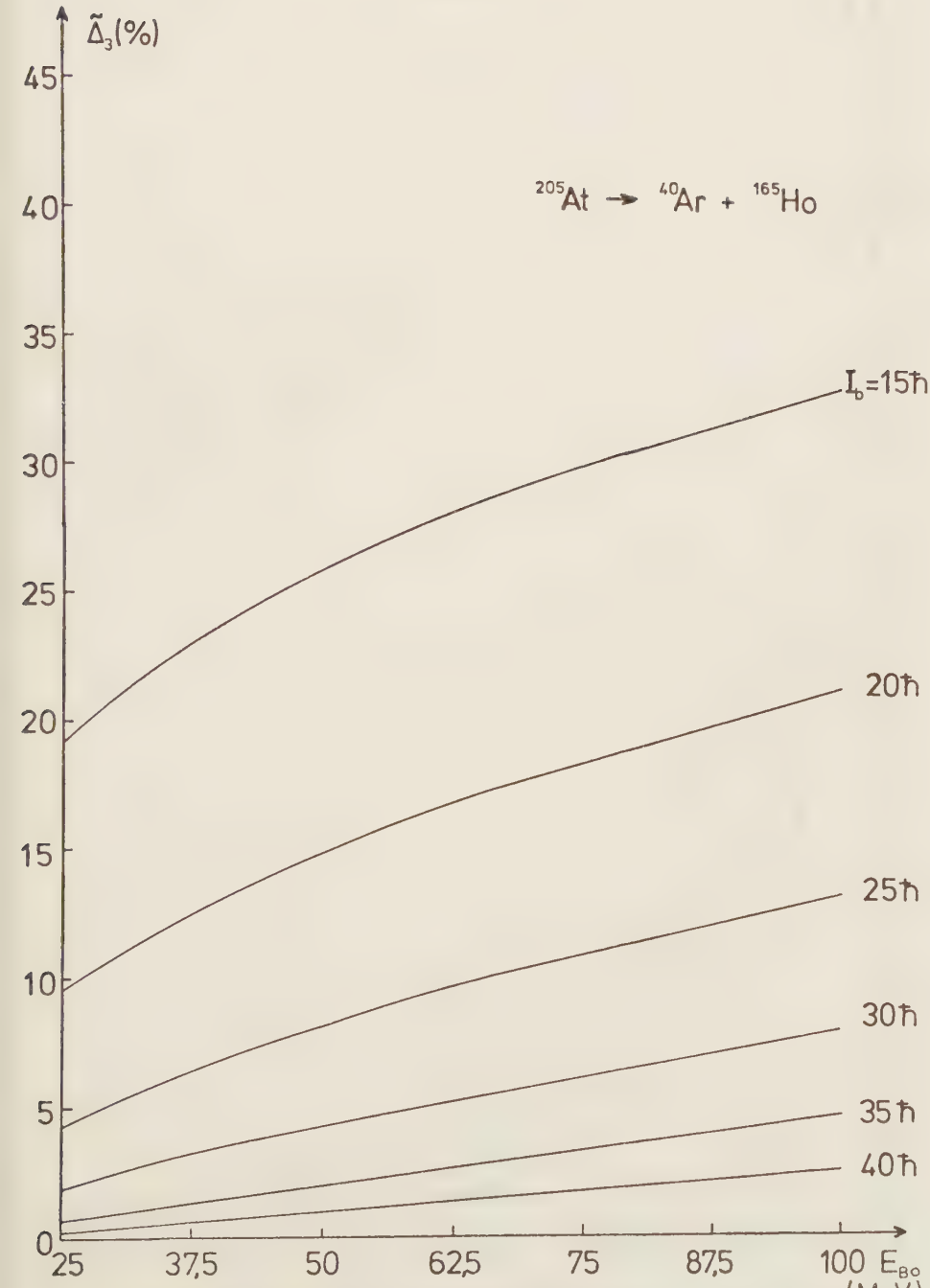


Fig.(4.17): Der Verlauf von $\tilde{\Delta}_3$ der Reaktion $^{205}At \rightarrow {}^{40}Ar + {}^{165}Ho$ in Abhängigkeit von E_{Bo} für sechs Werte von I_b.

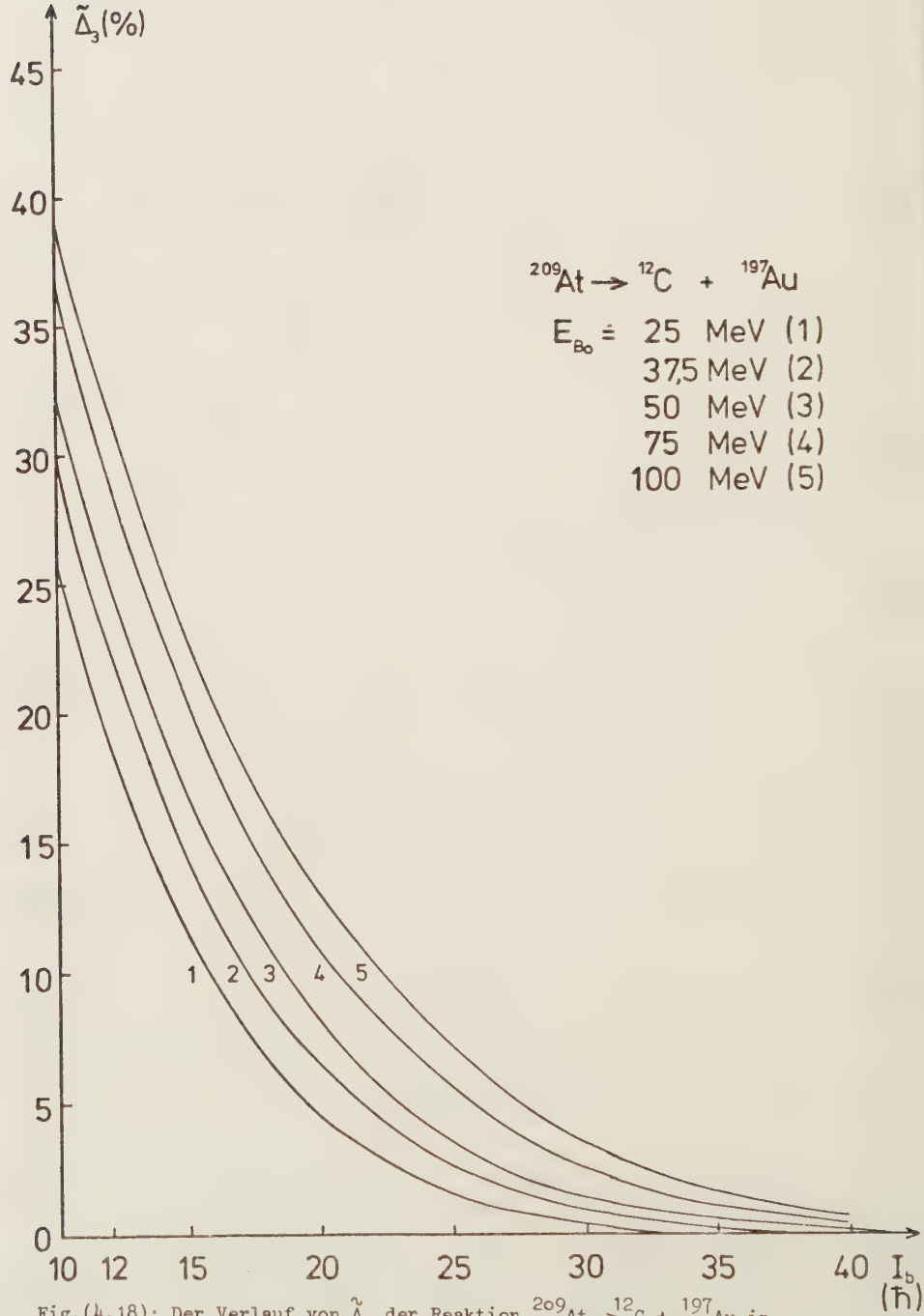


Fig.(4.18): Der Verlauf von $\tilde{\Delta}_3$ der Reaktion $^{209}At \rightarrow {}^{12}C + {}^{197}Au$ in Abhängigkeit von I_b für fünf Werte von E_{Bo}.

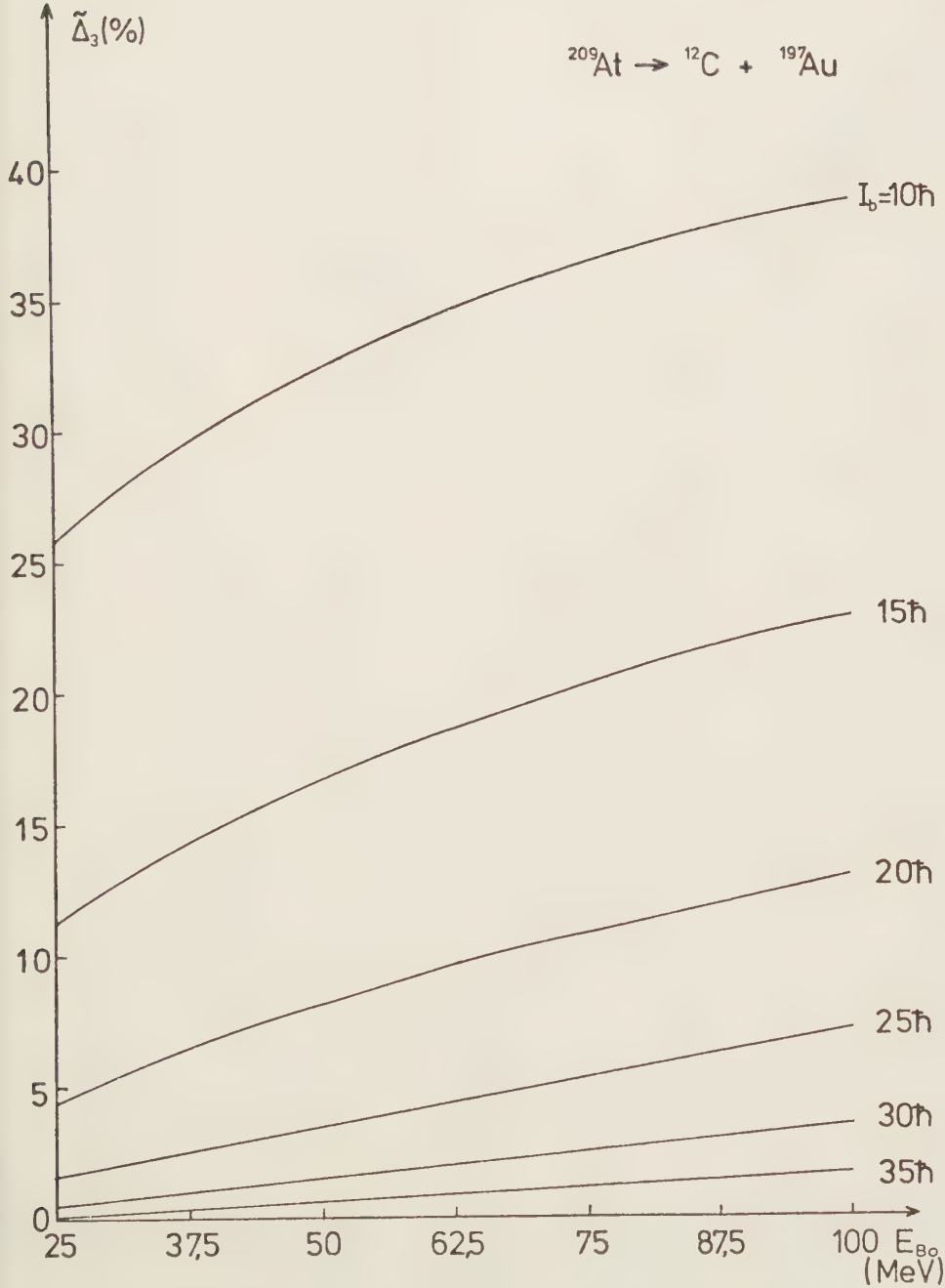


Fig.(4.19): Der Verlauf von $\tilde{\Delta}_3$ der Reaktion $^{209}At \rightarrow {}^{12}C + {}^{197}Au$ in Abhängigkeit von E_{Bo} für sechs Werte von I_b.

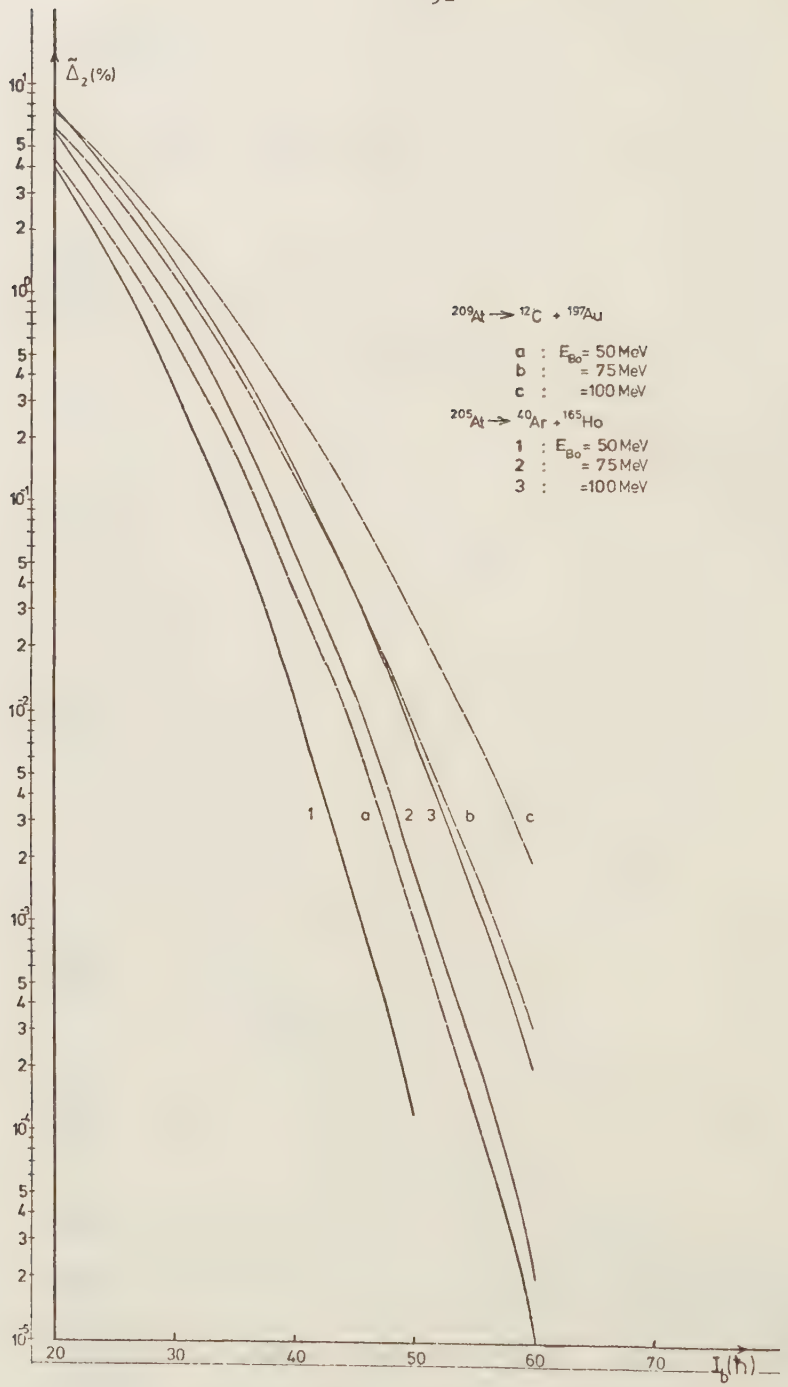


Fig.(4.20): Der Verlauf der prozentualen Fehlerschranke $\tilde{\Delta}_2$ der Reaktionenen $^{209}At \rightarrow {}^{12}C + {}^{19}$ und $^{205}At \rightarrow {}^{40}Ar + {}^{165}Ho$ in Abhängigkeit von I_b für drei Werte von E

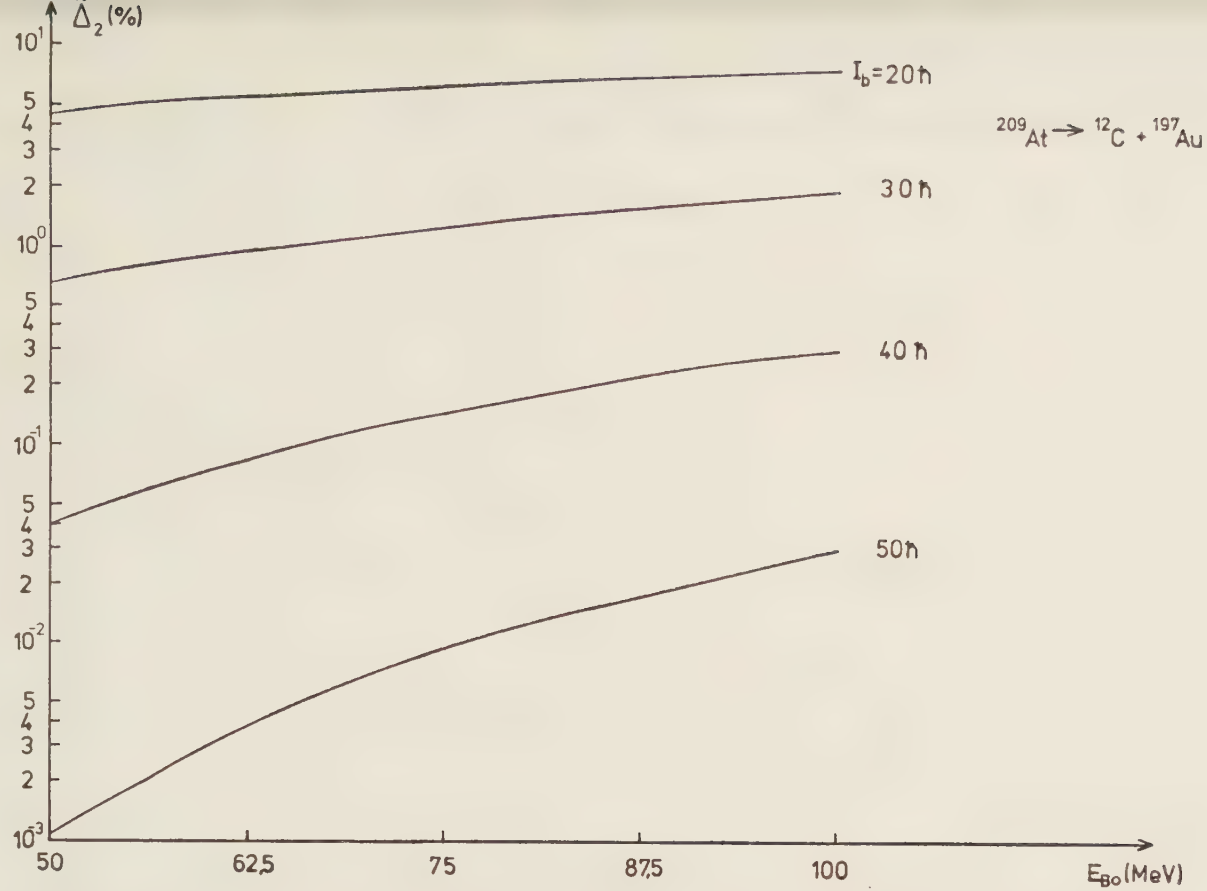


Fig.(4.21): Der Verlauf von $\tilde{\Delta}_2$ der Reaktion $^{209}At \rightarrow {}^{12}C + {}^{197}Au$ in Abhängigkeit von E_{Bo} für die vier Werte von I_b.

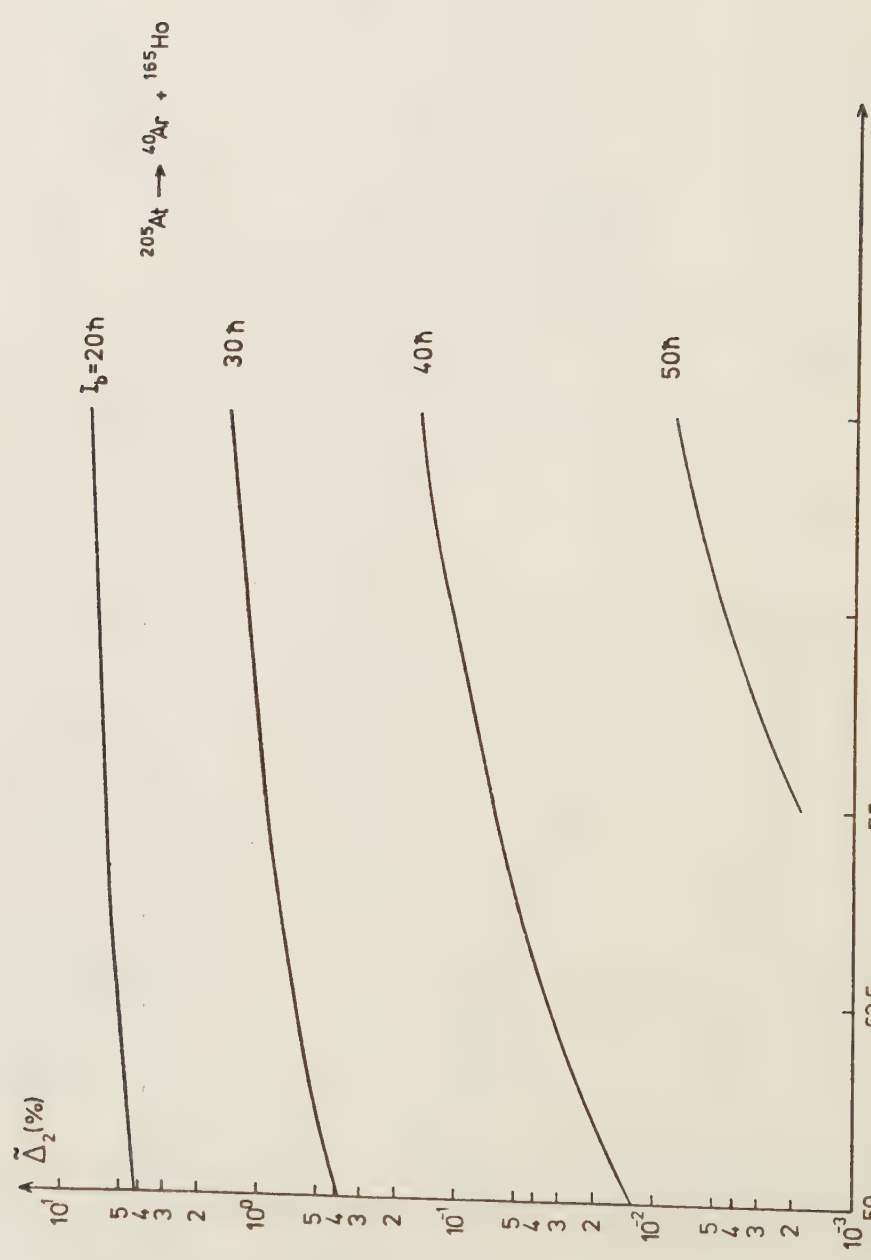
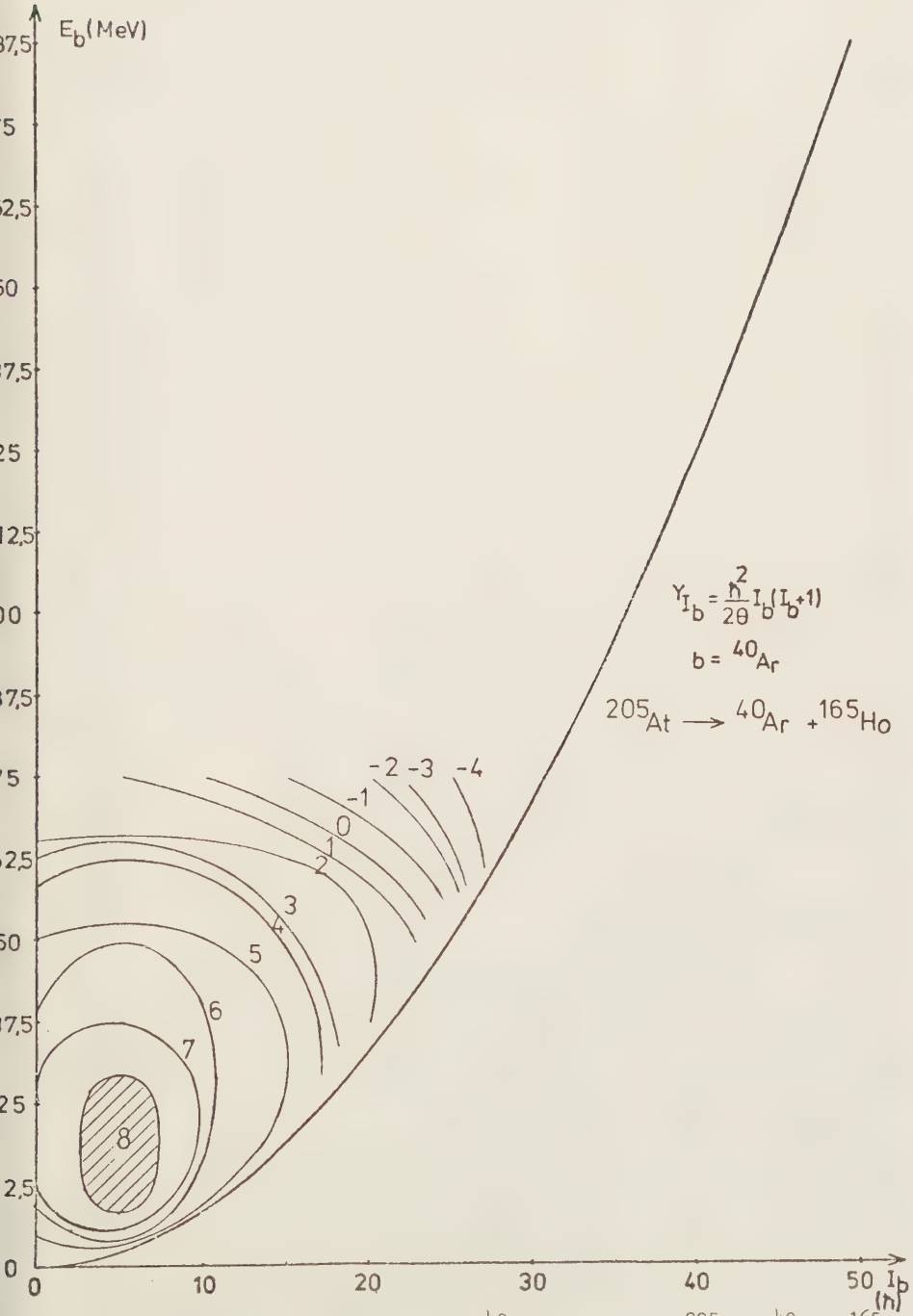


Fig.(4.22): Der Verlauf von $\tilde{\Delta}_2$ der Reaktion $^{205}At \longrightarrow {}^{40}Ar + {}^{165}Ho$ in Abhängigkeit von E_{Bo} für die vier Werte von I_b.



ig.(5.1): Die relative Population (RP) für ^{40}Ar der Reaktion $^{205}At \rightarrow {}^{40}Ar + {}^{165}Ho$ mit gewählter maximaler Energie des Fragments b $(E_b)_{max}$ =100 MeV und gewählten Referenzdaten E = 75 MeV, I = 0.

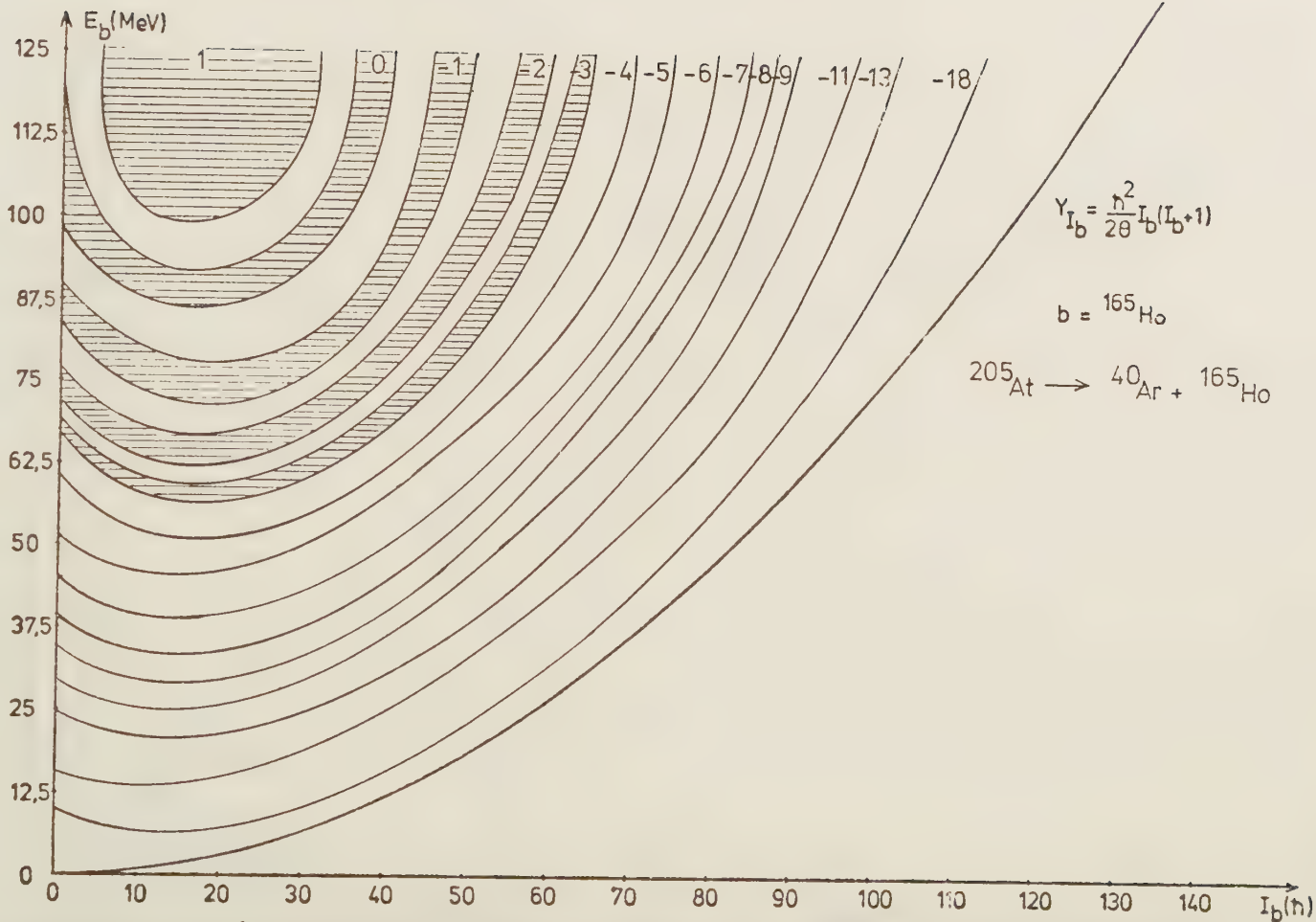


Fig:(5.2): RP für ^{165}Ho der Reaktion ^{205}At⟶^{40}Ar + ^{165}Ho mit $(E_b)_{max}$ = [illegible] MeV und gewählten Referenzdaten

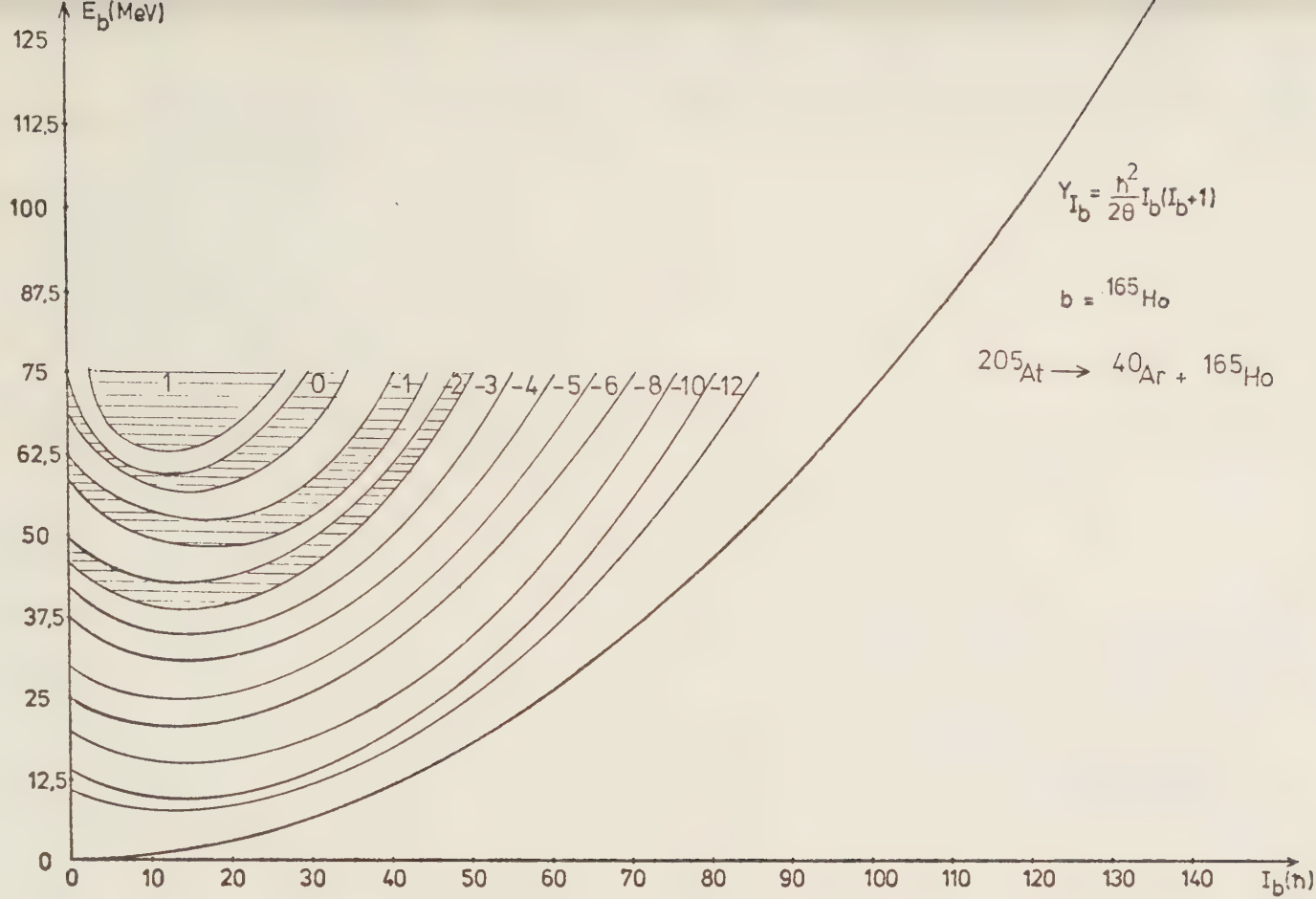


Fig.(5.3): RP für ^{165}Ho der Reaktion ^{205}At $\rightarrow$ ^{40}Ar + ^{165}Ho mit $(E_b)_{max}$ = 100 MeV und gewählten Referenzdaten
F = 75 MeV, I = 0.

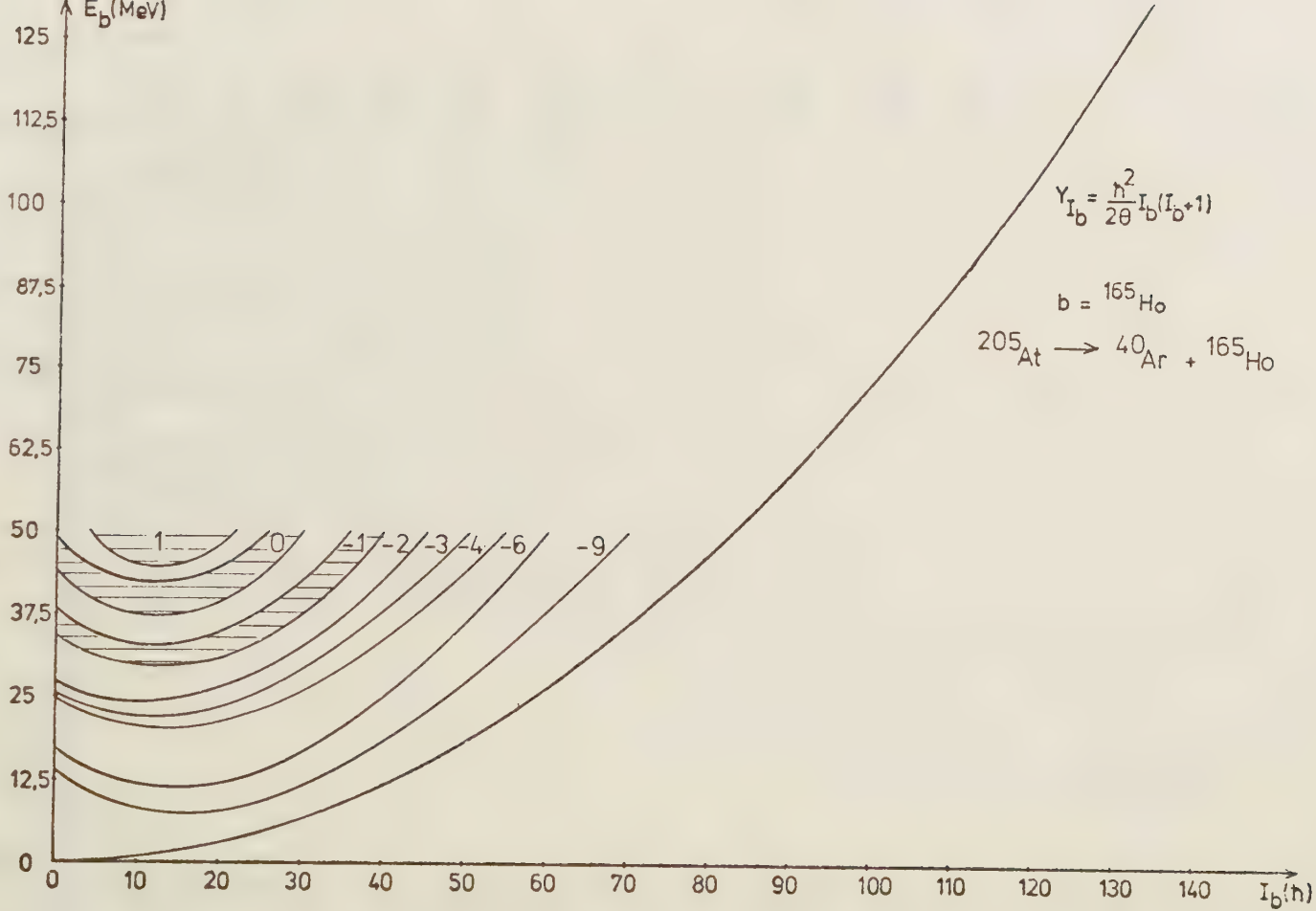


Fig.(5.4): RP für ^{165}Ho der Reaktion ^{205}At ⟶ ^{40}Ar + ^{165}Ho mit $(E_b)_{max}$ = 75 MeV und gewählten Referenzdaten

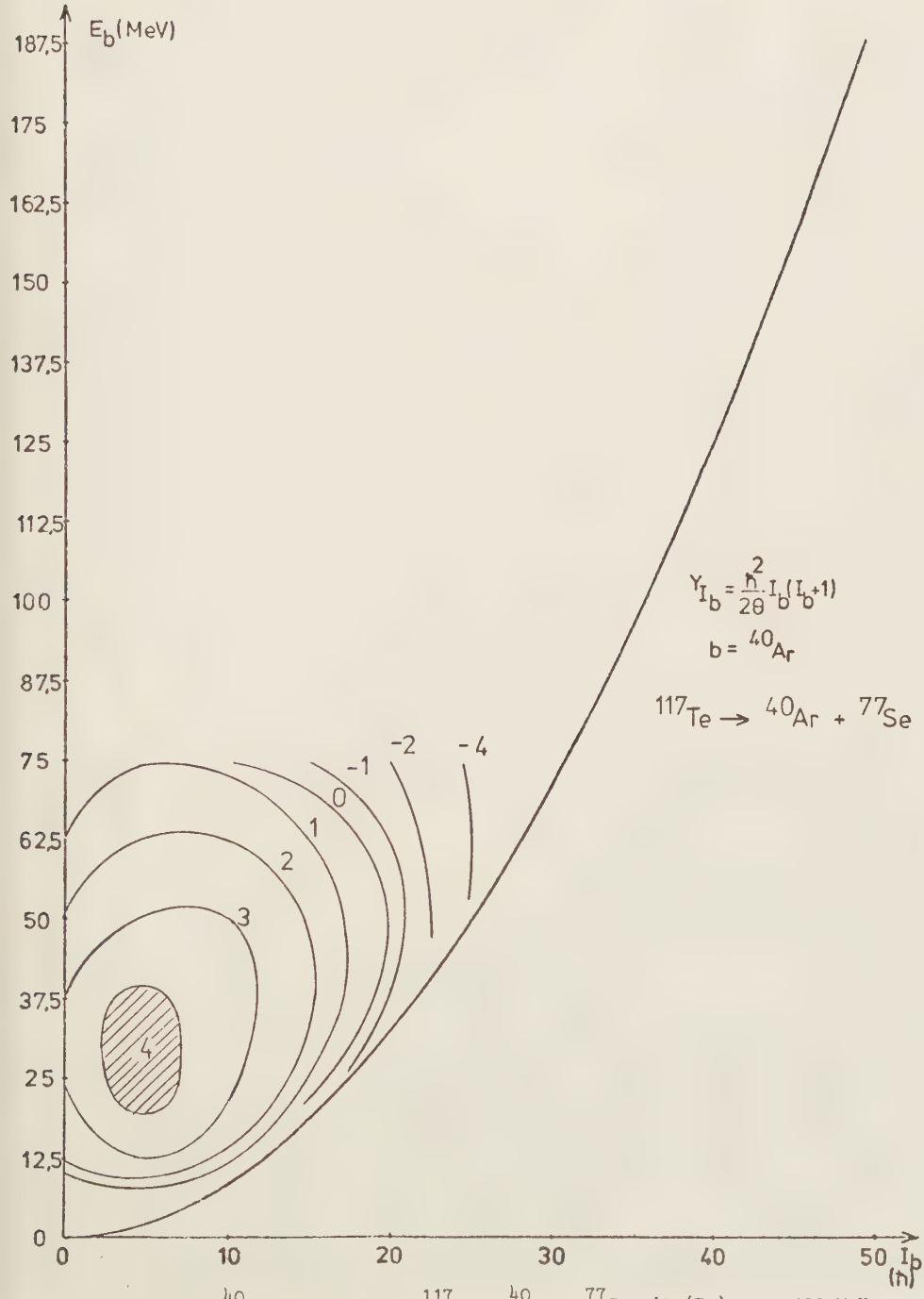


Fig.(5.5): RP für ^{40}Ar der Reaktion $^{117}Te \rightarrow {}^{40}Ar + {}^{77}Se$ mit $(E_b)_{max}$ = 100 MeV und gewählten Referenzdaten E = 75 MeV, I = 0.

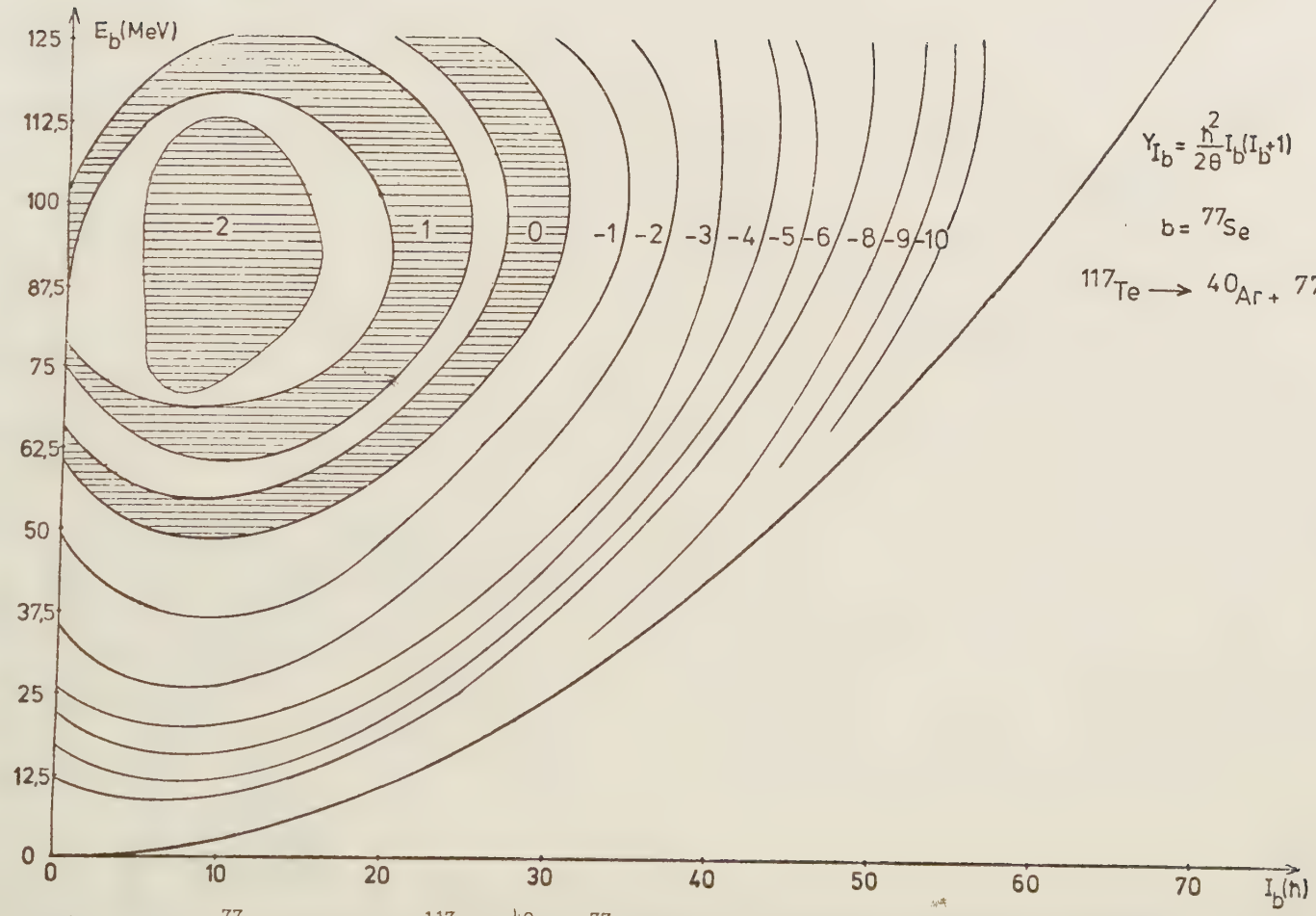


Fig.(5.6): RP für ^{77}Se der Reaktion $^{117}Te \rightarrow {}^{40}Ar + {}^{77}Se$ mit $(E_b)_{max}$ = 150 MeV und gewählten Referenzdaten
E = 125 MeV, I = 0

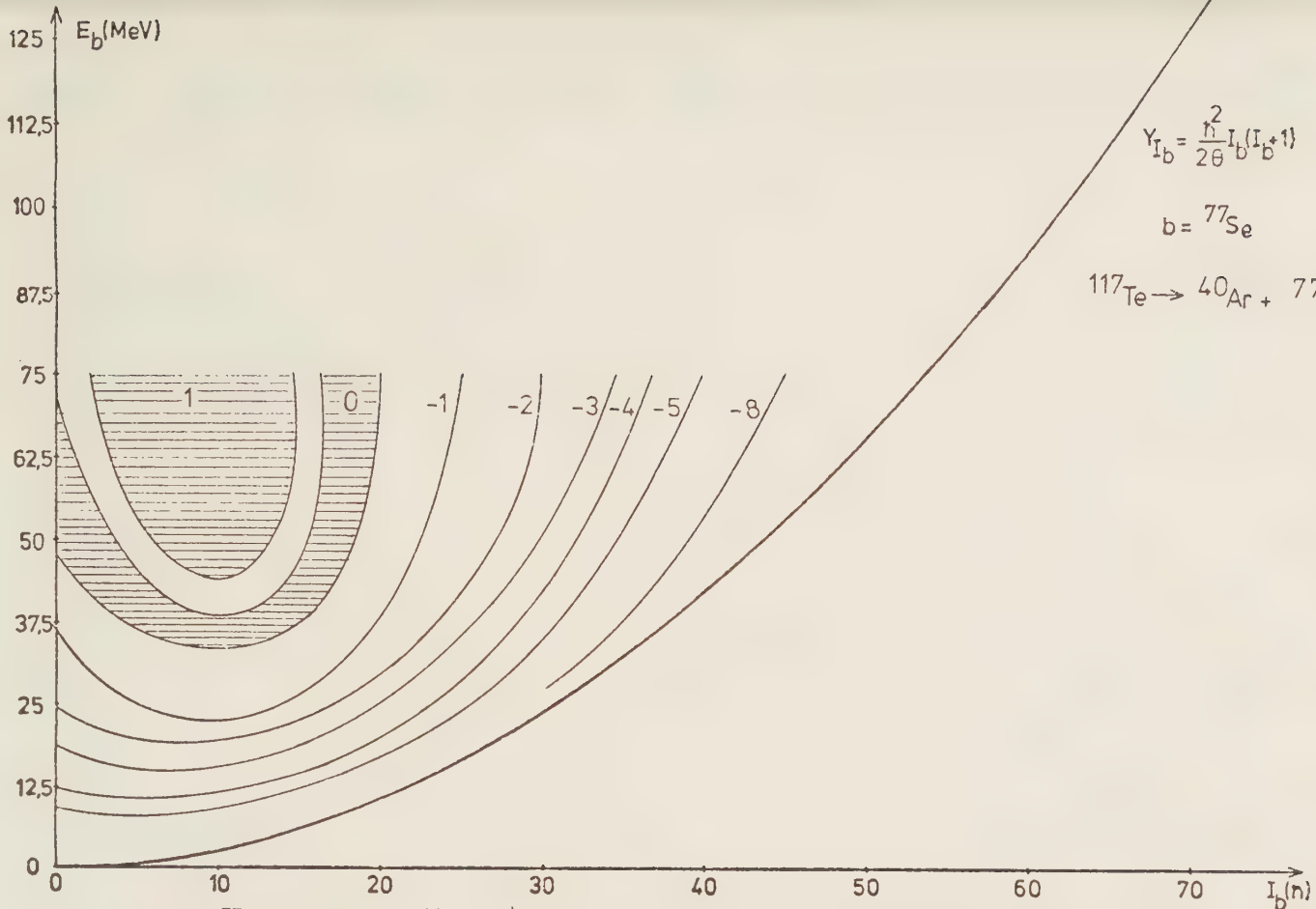


Fig.(5.7): RP für ^{77}Se der Reaktion $^{117}Te \rightarrow {}^{40}Ar + {}^{77}Se$ mit $(E_b)_{max}$ = 100 MeV und gewählten Referenzdaten E = 75 MeV, I = 0.

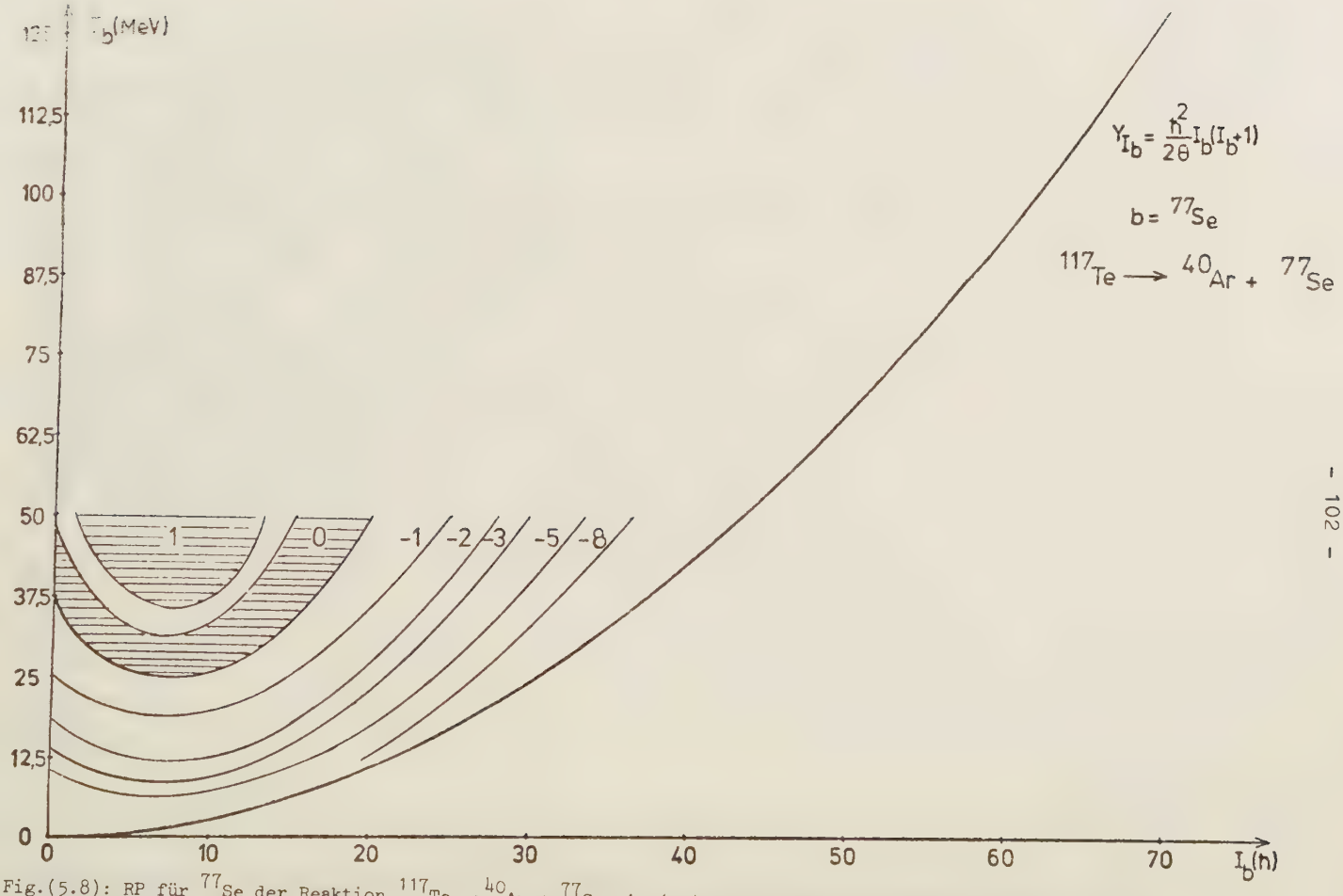


Fig.(5.8): RP für ^{77}Se der Reaktion $^{117}Te \longrightarrow {}^{40}Ar + {}^{77}Se$ mit $(E_b)_{max}$ = 75 MeV und gewählten Referenzdaten E = 50 MeV, I = 0.

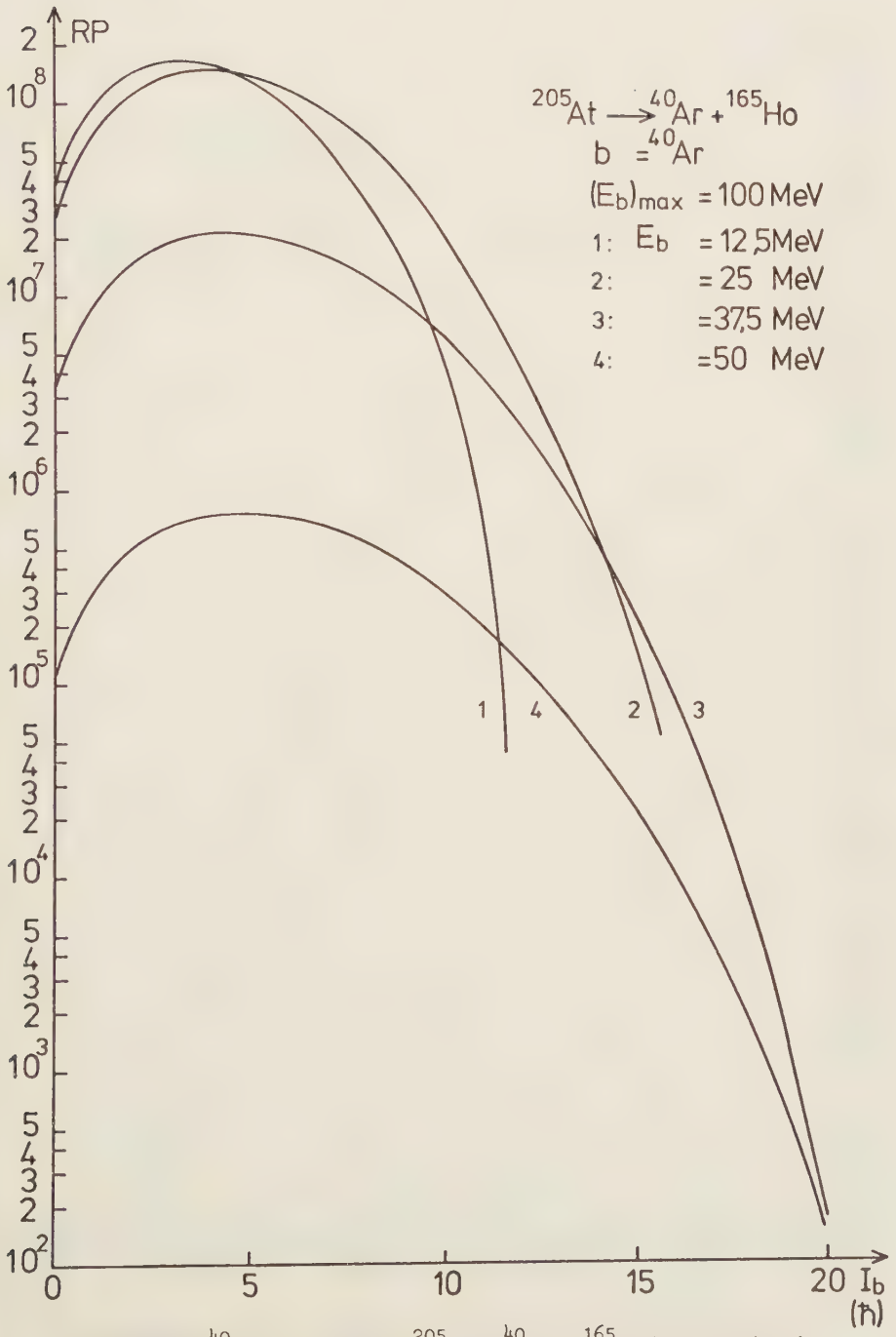


Fig.(5.9): RP für ^{40}Ar der Reaktion $^{205}At \longrightarrow ^{40}Ar + ^{165}Ho$ in Abhängigkeit von I_b für vier Werte von E_b.

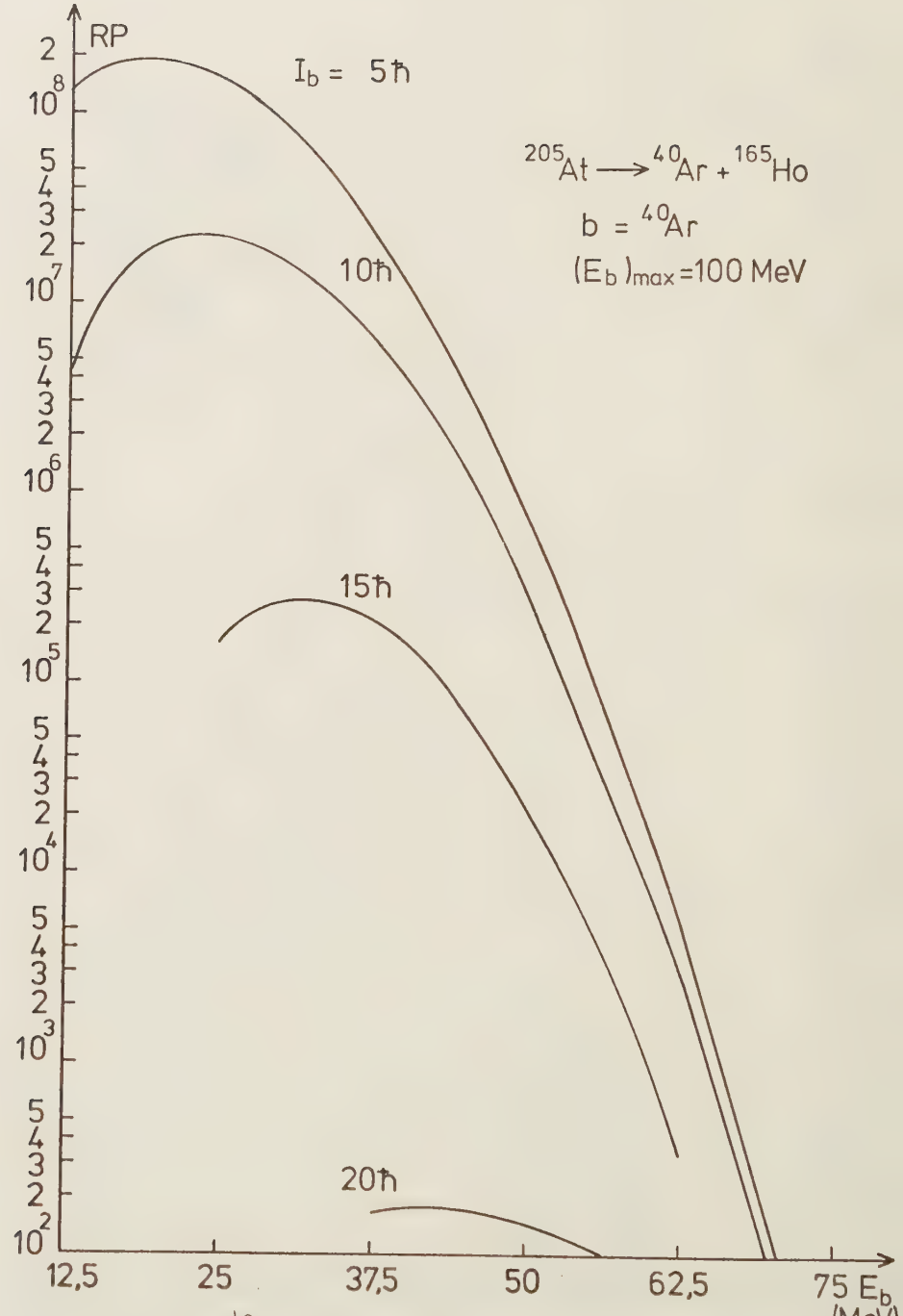


Fig.(5.10): RP für ^{40}Ar der Reaktion $^{205}At \longrightarrow {}^{40}Ar + {}^{165}Ho$ in Abhängigkeit

von E_b für vier V_{at}

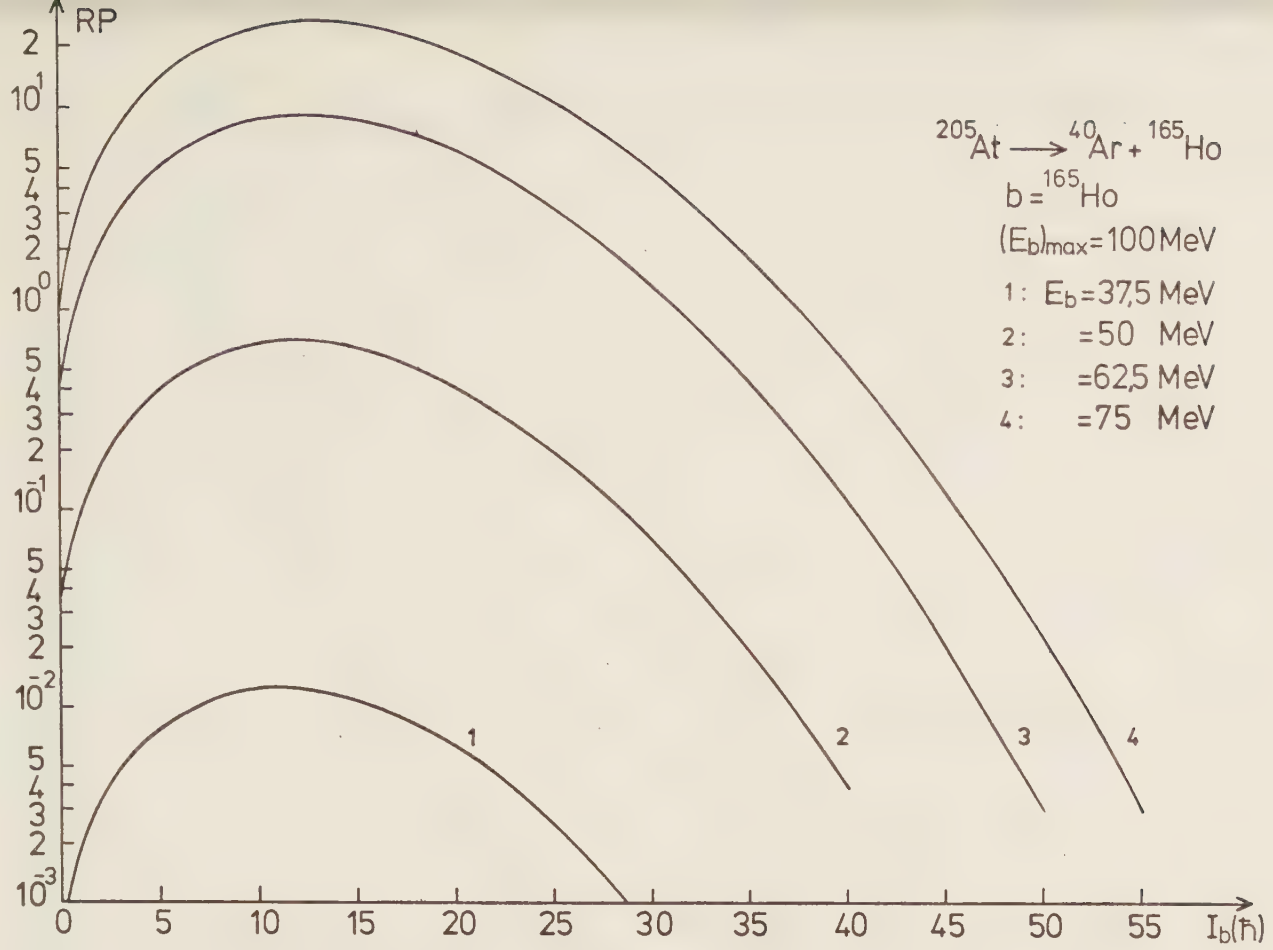


Fig.(5.11): RP für ^{165}Ho der Reaktion $^{205}At \rightarrow {}^{40}Ar + {}^{165}Ho$ in Abhängigkeit von I_b für vier Werte von E_b.

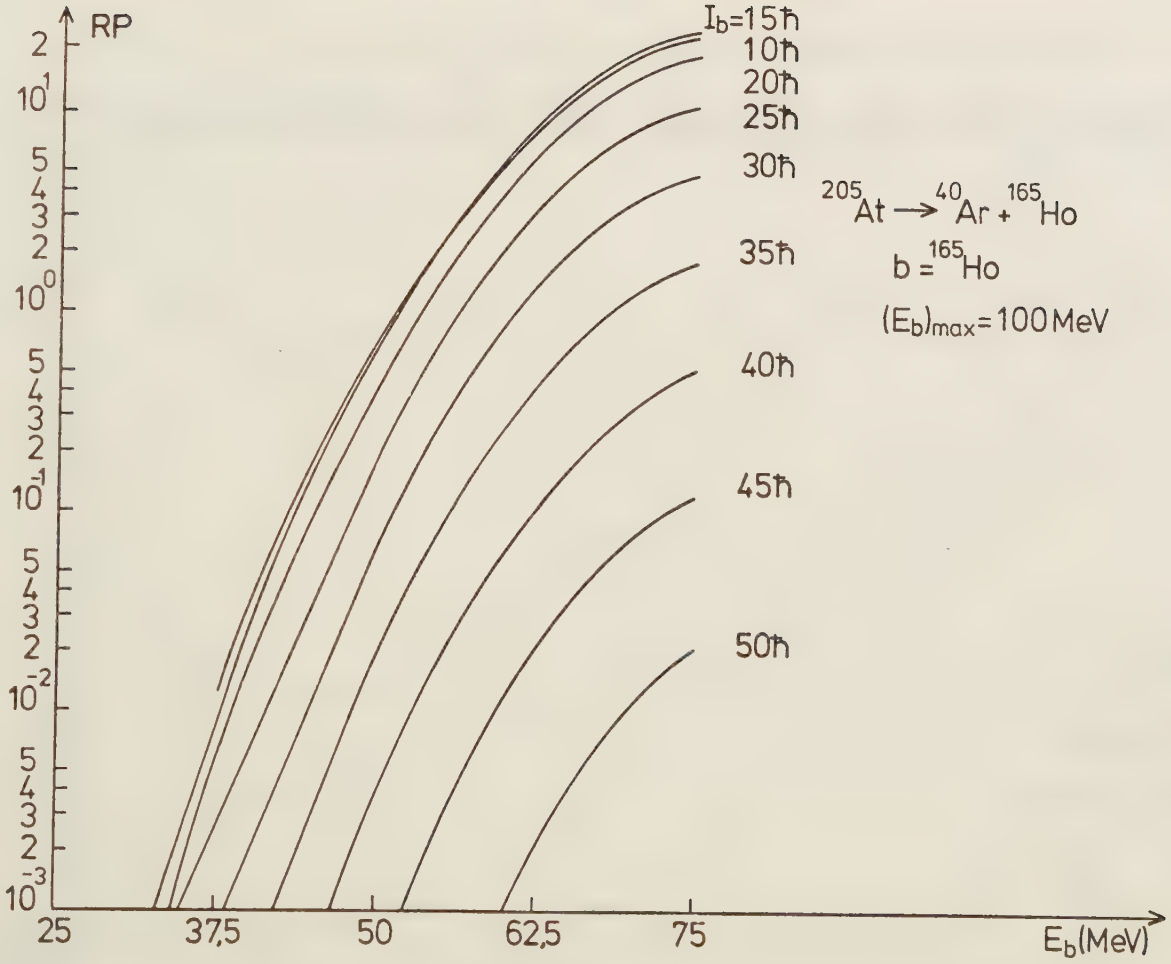


Fig.(5.12): RP für ^{165}Ho der Reaktion $^{205}At \rightarrow {}^{40}Ar + {}^{165}Ho$ in Abhängigkeit von E_b für verschiedene

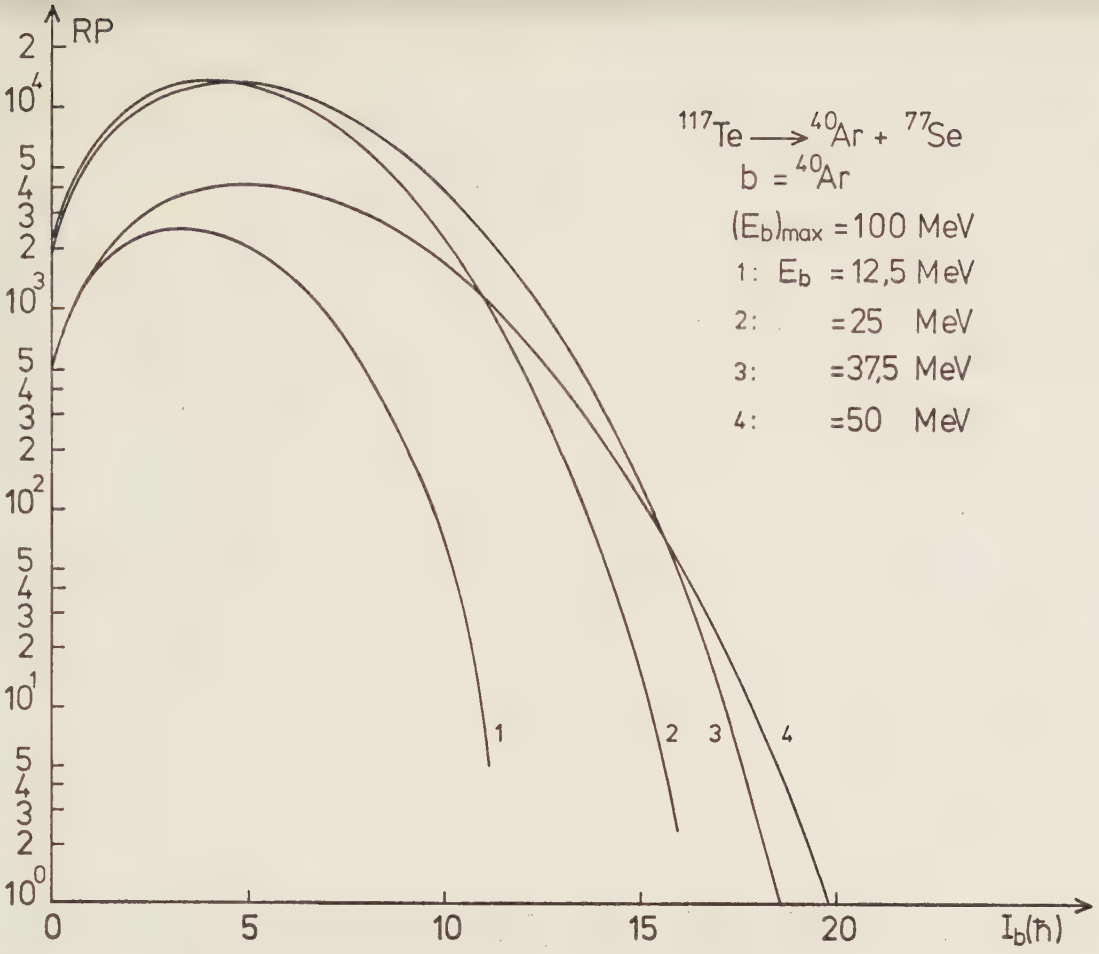


Fig.(5.13): RP für ^{40}Ar der Reaktion $^{117}Te \longrightarrow {}^{40}Ar + {}^{77}Se$ in Abhängigkeit von I_b für vier Werte von E_b.

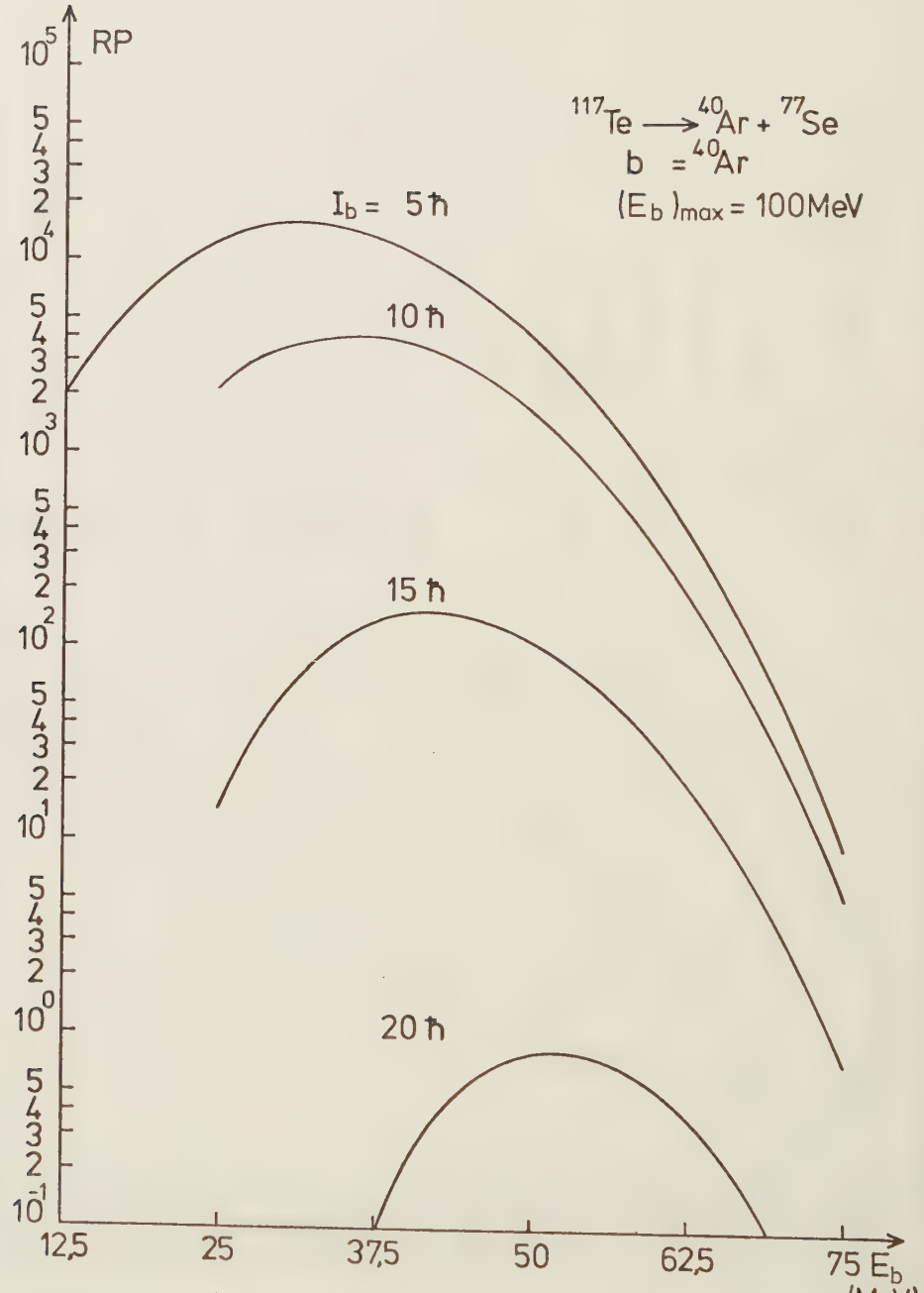


Fig.(5.14): RP für ^{40}Ar der Reaktion $^{117}Te \longrightarrow {}^{40}Ar + {}^{77}Se$ in Abhängigkeit von E_b für vier Werte von I_b.

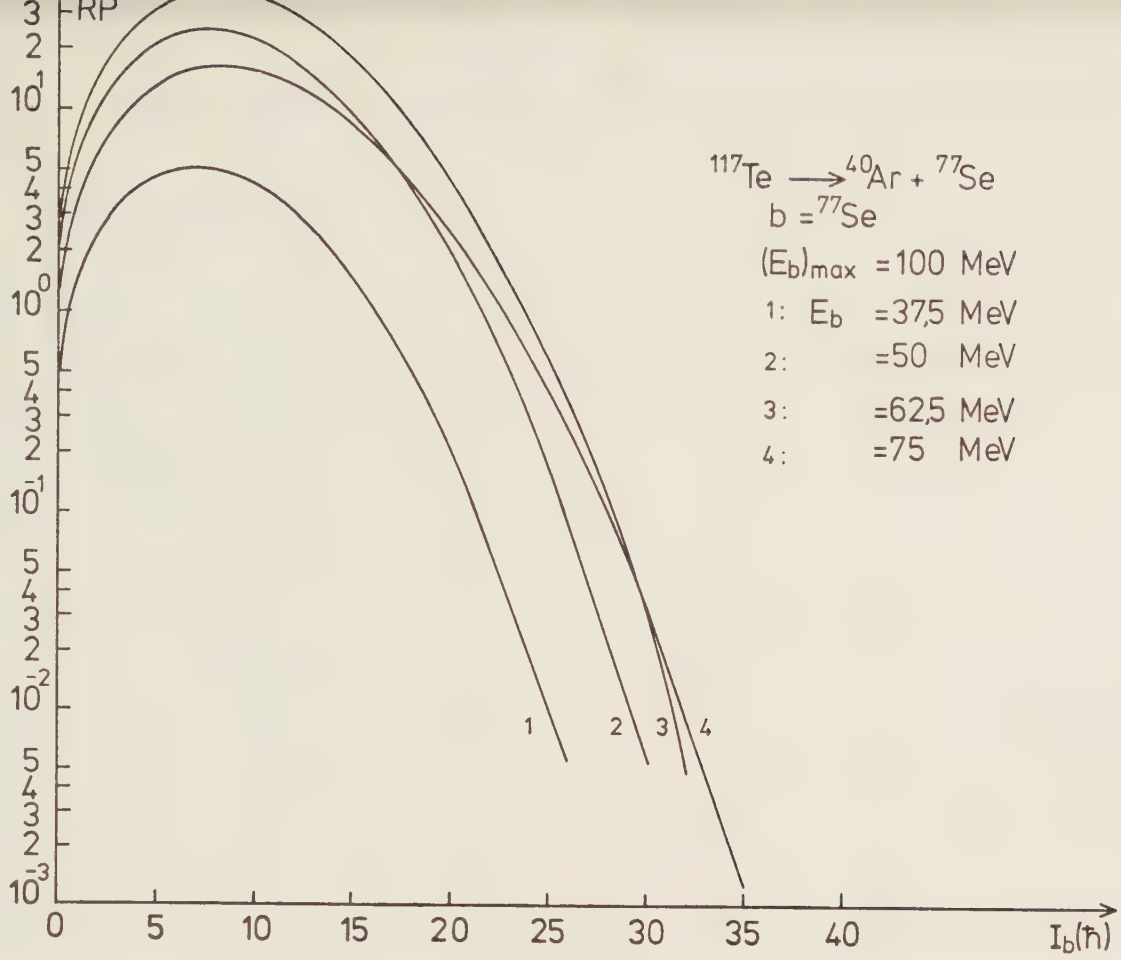


Fig.(5.15): RP für ^{77}Se der Reaktion $^{117}Te \longrightarrow {}^{40}Ar + {}^{77}Se$ in Abhängigkeit von I_b für vier Werte von I_b.

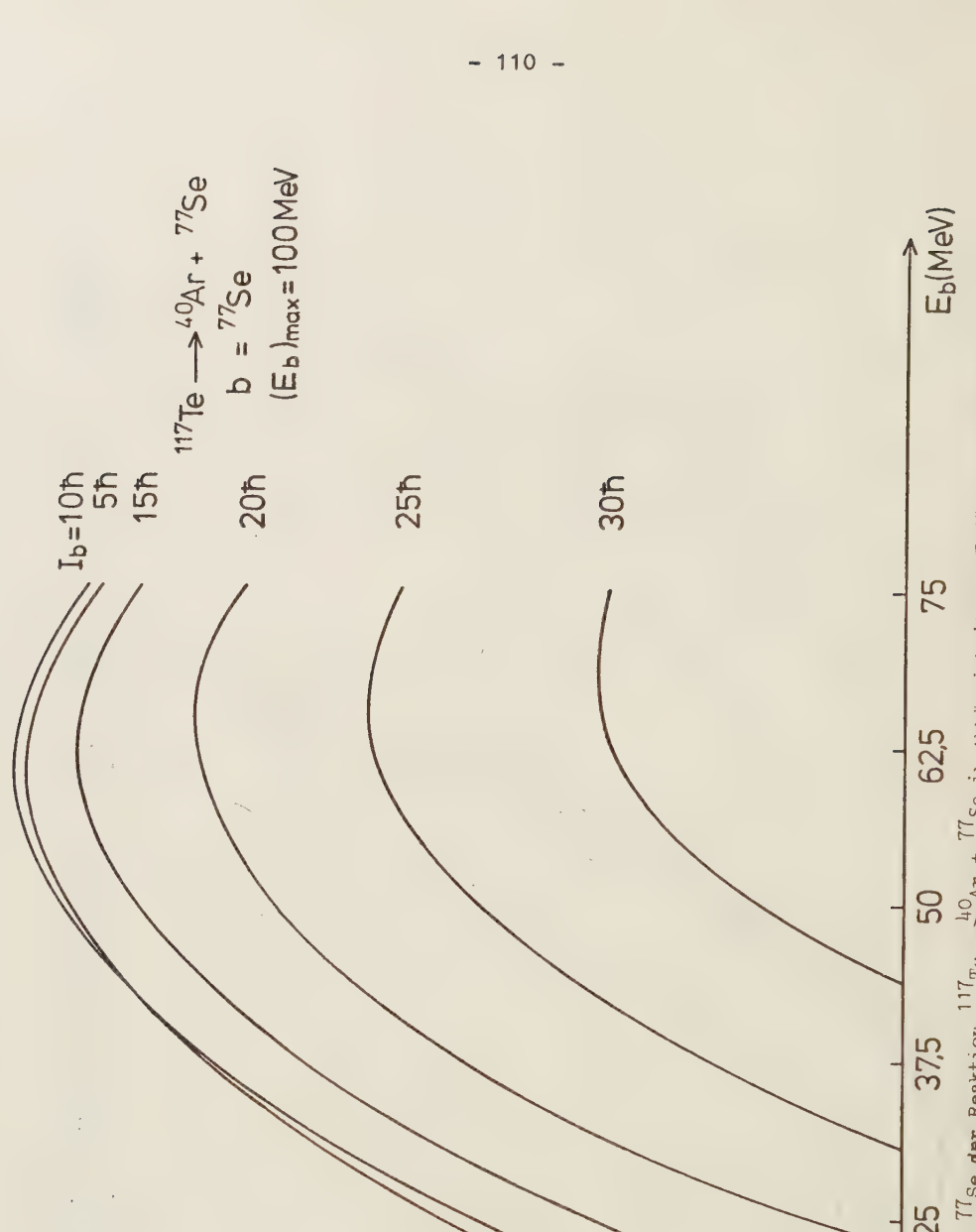


Fig.(5.16): RP für ^{77}Se der Reaktion $^{117}Te \longrightarrow {}^{40}Ar + {}^{77}Se$ in Abhängigkeit von E_b für verschiedene Werte von I_b

Literaturverzeichnis

1. B. Gatty et al, Nucl.Physics A253 (1975) 511 - 532.

2. B. Wilkins and G. Igo, Proc. of the Third Conf. on Reactions between Complex Nuclei, Asilomar, 1963, ed. by Ghiorso et al (University of California Press, Berkeley, 1963) p. 241.

3. M. Lefort, J. de Physique 33 (1972) C5-73.

4. M.C. Bertin, S.L. Tabor, B.A. Watson, Y.Eisen and Goldring, Nucl. Phys. A167 (1971) 261.

5. J. Wilczynski, Nucl. Phys. A216 (1973) 386.

6. W. Nörenberg and H.A. Weidenmüller, Lecutre Notes in Physics, vol. 51, Springer-Verlag 1976.

7. B.N. Kalinkin and I.Z. Petkov, Acta Phys. Polon. 25, 265 (1964); UCRL - Trans - 1151, 1964.

8. T.D. Thomas, Phys. Rev. 116, 703 (1959).

9. J.B. Natowitz, Phys. Rev. C1 (1970) 623.

10. M. Lefort et al, International conference on "Reactions between complex nuclei" in Nashville Tennessee (1974), Vol. II , ed. by R.L. Robinson.

11. R. Bass, Phys. Lett. 47B, 139 (1973).

12. M. Lefort et al, Nucl. Phys. A216 (1973) 166-172.

13. F. Hanappe et al, Proceedings of the third international Symposium on the Physics and Chemistry of fision, Rochester 1973, Vol. II.

14. A.G. Artukh et al, Nucl. Phys. A215, 91 (1973).

15. T.D. Thomas, Ann. Rev. of Nucl. Science, Vol. 18, 343 (1968).

16. A.C. Douglas and N. Macdonald, Nucl. Phys. 13 (1959) 382 - 396.

17. T. Ericson, Advan. Phys., 63 425 (1960).

18. M. Abramowitz, I.A. Stegun, Handbook of Mathematical Functions (Dover Publications, New York, 1965).

Lebenslauf

Geboren am 26. April 1945 in Jember (Indonesien)

1953 - 1962 Besuch der chinesischen Volks- und Mittelschule in Jember (Indonesien).

1962 - 1965 Besuch der indonesischen Oberschule in Surabaya (Indonesien); Abitur Juli 1965.

1966 Beginn des Physikstudiums an der mathematisch-naturwissenschaftlichen Fakultät der staatlichen Universität Gadjah Mada in Yogyakarta (Indonesien).

1968 Diplomvorprüfung in Physik.

1970 - 1971 Tätigkeit als wissenschaftliche Hilfskraft.

1972 Diplomprüfung in der Fachrichtung Theoretische Physik mit einer Diplomarbeit auf dem Gebiet der Elementarteilchenphysik ("Die Anwendung der SU(3)-Symmetrie in der Hadronenphysik ") unter der Anleitung von Herrn Prof. Dr. A. Baiguni.

1972 Beschäftigung bei der National Atomic Energy Agency in Yogyakarta (Indonesien).

1973 Ab Sommersemester Immatrikulation an der Philipps-Universität Marburg und Wechsel des Fachgebiets zur theoretischen Kernphysik; Beginn der Promotionsarbeit unter der Anleitung von Herrn Prof.Dr. G. Grawert in der Arbeitsgruppe "Streutheorie und Kernreaktionen".

1975 Ab Wintersemester 1975/76 Tätigkeit als wissenschaftliche Hilfskraft mit Abschluß.